افزایش دقت روشهای انتگرال گیری مستقیم ویلسون و نیومارک با استفاده از روش بردار بار پسماند

*رامین فدائیان، پژوهشگر و طراح سازه
*محمود حسینی، استادیار و مدیر گروه شریانهای حیاتی پژوهشگاه
*محسن غفوری آشتیانی، استاد و رئیس پژوهشگاه

۱- چکیده

در این مقاله، با توجه به استفادهٔ گسترده روشهای انتگرال گیری مستقیم در تحلیل دینامیکی خطی و بخصوص غیرخطی سازه ها از یک سو و نیاز به دقت بسیار زیاد در تحلیلهای لرزه ای ویژه از جمله حالات ترکیب چند تکیه گاهی از سوی دیگر، روشی برای افزایش دقت این روشها ارائه شده است. در این راستا، ابتدا اثر محاسبهٔ مقدار شتاب در انتهای گامهای زمانی انتگرال گیری مستقیم به روشهای ویلسون و نیومارک در پایداری و دقت این دو روش بررسی شده است. برای این منظور، شعاع طیفی ماتریس تقریب انتگرال گیری در این دو روش برای حالتهای استاندارد و اصلاح شدهٔ آنها مورد استفاده قرار گرفته است. سپس، روش بردار بار پسماند برای رفع نقاط ضعف این گونه روشهای عددی و افزایش دقت آنها پیشنهاد شده است. با استفاده از روش مذکور، دیگر نیازی به معکوس ماتریس جرم نبوده و سازگاری و تعادل بردارهای پاسخ در گامهای متوالی به طور خودکار تأمین می گردد. دقت و همگرایی روشهای اصلاح شده فوق با استفاده از روش بردار بار پسماند، بررسی و نشان داده شده است که اعمال اصلاح در محاسبهٔ شتاب لحظه انتهایی گامهای زمانی برخلاف انتظار، باعث مشروط شدن پایداری روش ویلسون می گردد؛ حال آنکه، در روش نیومارک تأثیری ندارد.

کلیدواژه ها: تحلیل تاریخچه زمانی، روشهای انتگرال گیری مستقیم، روش ویلسون، روش نیومارک، ماتریس تقریب انتگرال گیری، بردار بار پسماند، پایداری، همگرایی.

۲- مقدمه

در بیشتر روشهای انتگرال گیری که تاکنون انتشار یافته، توصیه شده است که بردار شتابهای گرهی با استناد به رابطه تعادل دینامیکی محاسبه گردد تا از این طریق تعادل دینامیکی سازه در هر گام زمانی برقرار شود. این روش معایب چندی دارد:

۱- برای محاسبه مجدد بردار شتابهای گرهی به معکوس ماتریس جرم نیاز است که مستلزم صرف زمان محاسباتی و حافظه برای ذخیره سازی ماتریس محاسبه شده می باشد. در بعضی موارد نیز مانند مدل سازی جرم سازه به صورت متمرکز، جرم متناظر با درجات آزادی سازه وجود ندارد. از این رو، معکوس سازی ماتریس جرم متمرکز سازه، در مواردی که درجات آزادی دورانی فعال باشند، امکان پذیر نمی باشد.

۲- محاسبه مجدد بردار شتابهای گرهی رابطه درونی بین بردارهای شتاب، سرعت و تغییرمکان را نقض می کند. از این رو، بردارهای زمانی به دست آمده یک مجموعه سازگار را تشکیل نخواهند داد.

۳- با تجدید محاسبه بردار شتابهای گرهی فرض شده است که بردارهای سرعت و تغییرمکانهای گرهی به درستی محاسبه شده اند و تنها بردار شتاب باید اصلاح گردد [۱].

در این مقاله، پیشنهاد شده است که به جای محاسبه مجدد بردار شتابهای گرهی، بردار بار پسماند که حاصل عدم برقراری تعادل دینامیکی در هر گام زمانی می باشد، از بردار نیروهای مؤثر دینامیکی کسر گردد. از این طریق، بردارهای پاسخ گرهی (شتاب، سرعت و تغییرمکان) در گامهای بعدی برای برقراری تعادل دینامیکی به طور همزمان تنظیم خواهند شد. علاوه بر آن، سازگاری بین بردارهای پاسخ گرهی نیز برقرار خواهد بود. در این روش، به معکوس سازی ماتریس جرم نیاز نیست و از این رو حافظه اضافی برای ذخیره سازی ماتریسهای محاسبه شده مورد نیاز نمی باشد. این روش

قابل کاربرد در مدلهای جرم متمرکز و نیز جرم سازگار می‌باشد. لازم به توجه است که در تحلیل دینامیکی غیرخطی سازه ها، به دلیل اختلاف بین سختی مماسی و یا سکانتی با سختی واقعی سیستم، لازم است تا بردار پسماند به جا مانده در سیستم، در هر گام زمانی از بردار دینامیکی موثر حذف گردد. در این گونه موارد هیچ گونه پردازش اضافی نیز مورد نیاز نمی‌باشد و فرایند برقرارسازی تعادل دینامیکی به‌صورت خودکار انجام خواهد گرفت [۱].

می‌توان نشان داد که همگرایی و پایداری پاسخ دینامیکی سیستم‌های چند درجه آزاد، منوط به تأمین همگرایی و پایداری سیستم های یک درجه‌آزادِ حاصل از جداسازی مدی سازه چند درجه آزاد می‌باشد [۲]. از این رو در ادامه، همگرایی و پایداری روش پیشنهاد شده در انتگرال گیری عددی معادله دیفرانسیل تعادل دینامیکی سیستم های یک درجه آزاد مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

۳- همگرایی و پایداری روشهای انتگرال گیری مستقیم

تعادل دینامیکی یک سیستم یک درجه آزاد با فرکانس طبیعی (ω)، نسبت‌میرایی (ξ) و بار وارده (r) به‌صورت رابطه (۱) نوشته می‌شود:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x = r \tag{۱}$$

هدف، تخمین خطاهای انتگرال گیری رابطه (۱) برحسب ξ، r و $\Delta t/T$ خواهد بود که در آن T پریود ارتعاش طبیعی سازه می‌باشد. بدین منظور از روشهای گوناگونی می‌توان استفاده نمود. در این پژوهش، یک روش ساده و موثر مورد استفاده قرار گرفته که در آن گام اول، به دست آوردن تقریب انتگرال گیری و تابع بار است که متغیرهای نامعلوم را در زمان $t+\Delta t$ به صورت صریح بر حسب مقادیر پیشین خود بیان کنند [۲].

۳-۱- تقریب انتگرال گیری مستقیم و توابع بار

همانند روشهای انتگرال گیری مستقیم، فرض می‌شود که جوابهای مورد نیاز در گامهای زمانی $2\Delta t,...,t-\Delta t,t$ و $0,\Delta t$ به دست آمده و جوابهای گام $t+\Delta t$ مورد نیاز باشد. آنگاه هدف رابطه چرخشی (۲) برای روش انتگرال گیری موردنظر است:

$$\left\{\hat{X}\right\}_{t+\Delta t} = [A]\left\{\hat{X}\right\}_t + \{L\}r_{t+\upsilon} \tag{۲}$$

در رابطهٔ (۲)، $\hat{X}_{t+\Delta t}$ و $\hat{X}_t$، بردارهای ذخیره کننده جواب هستند و $r_{t+\upsilon}$ بارگذاری در لحظه $t+\upsilon$ می‌باشد. می‌توان نشان داد که υ برای روشهای گوناگون انتگرال گیری ممکن است مقادیر 0، Δt، یا $\theta\Delta t$ را به خود بگیرد. ماتریس [A] و بردار {L} به ترتیب با تقریب انتگرال گیری و تابع بار برابرند. هر یک از مقادیر رابطه (۲) به روش خاص انتگرال‌گیری موردنظر بستگی دارد. برای مطالعه پایداری و دقت روشهای انتگرال‌گیری رابطه (۲) مورد استفاده قرار خواهد گرفت. در ادامه، عملگرهای [A] و {L} برای دو روش متداول انتگرال گیری ارائه‌شده است (اطلاعات‌بیشتر در مراجع ارائه شده در انتهای مقاله).

۳-۱-۱- روش ویلسون θ

ایده اولیه در روش ویلسون آن است که فرض می‌شود شتاب در فاصله زمانی t تا $t+\theta\Delta t$، به صورت خطی تغییر کند [۳]. مقدار $\theta \geq 1$ است و برحسب شرایط پایداری و دقت بهینه عملیات محاسبه‌خواهد شد. هرگاه τ مبیّن افزایش زمان از مبنای t باشد به نحوی که $0 \leq \tau \leq \theta\,\Delta t$ باشد، برای بازه زمانی t الی $t+\theta\,\Delta t$ خواهیم داشت:

$$\ddot{x}_{t+\tau} = \ddot{x}_t + \left(\ddot{x}_{t+\Delta t} - \ddot{x}_t\right)\frac{\tau}{\Delta t} \tag{۳}$$

$$\dot{x}_{t+\tau} = \dot{x}_t + \ddot{x}_t\tau + \left(\ddot{x}_{t+\Delta t} - \ddot{x}_t\right)\frac{\tau^2}{2\Delta t} \tag{٤}$$

$$x_{t+\tau} = x_t + \dot{x}_t\tau + \frac{1}{2}\ddot{x}_t\tau^2 + \left(\ddot{x}_{t+\Delta t} - \ddot{x}_t\right)\frac{\tau^3}{6\Delta t} \tag{٥}$$

در زمان $t+\Delta t$ داریم:

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = x_t + \left(\ddot{x}_{t+\Delta t} + \ddot{x}_t\right)\frac{\Delta t}{2} \tag{٦}$$

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \dot{x}_t\Delta t + \left(\ddot{x}_{t+\Delta t} + 2\ddot{x}_t\right)\frac{\Delta t^2}{6} \tag{۷}$$

علاوه بر آن، در روش ویلسون، معادله تعادل (۱) در زمان $t+\theta\,\Delta t$ در نظر گرفته می‌شود:

$$\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} + 2\xi\omega\dot{x}_{t+\theta\Delta t} + \omega^2 x_{t+\theta\Delta t} = r_{t+\theta\Delta t} \tag{۸}$$

با استفاده از رابطه های (۳)، (٤) و (٥) در زمان $\tau = \theta\Delta t$ و جایگزینی در رابطه (۸)، رابطه ای با تنها مقدار نامعلوم $\ddot{x}_{t+\Delta t}$ به دست خواهد‌آمد. هرگاه رابطه به دست آمده برای مقدار $\ddot{x}_{t+\Delta t}$ حل شود و پاسخ در روابط (٦) و (۷) جایگزین گردد، رابطه (۹) را می‌توان به‌شکل رابطه (۲) ارائه نمود:

$$\begin{Bmatrix}\ddot{x}_{t+\Delta t}\\ \dot{x}_{t+\Delta t}\\ x_{t+\Delta t}\end{Bmatrix} = [A]\begin{Bmatrix}\ddot{x}_t\\ \dot{x}_t\\ x_t\end{Bmatrix} + \{L\}r_{t+\theta\Delta t} \tag{۹}$$

که در آن:

(۱۰)

$$[A] = \begin{bmatrix} 1-\dfrac{\beta\theta^2}{3}-\dfrac{1}{\theta}-\kappa\theta & \dfrac{1}{\Delta t}\left(-\beta\theta-2\kappa\right) & \dfrac{1}{\Delta t^2}\left(-\beta\right) \\ \Delta t\left(1-\dfrac{1}{2\theta}-\dfrac{\beta\theta^2}{6}-\dfrac{\kappa\theta}{2}\right) & 1-\dfrac{\beta\theta}{2}-\kappa & \dfrac{1}{\Delta t}\left(-\dfrac{\beta}{2}\right) \\ \Delta t^2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6\theta}-\dfrac{\beta\theta^2}{18}-\dfrac{\kappa\theta}{6}\right) & \Delta t\left(1-\dfrac{\beta\theta}{6}-\dfrac{\kappa}{3}\right) & 1-\dfrac{\beta}{6} \end{bmatrix}$$

$$\beta=\left(\frac{\theta}{\omega^2\Delta t^2}+\frac{\xi\theta^2}{\omega\Delta t}+\frac{\theta^3}{6}\right)^{-1}\qquad \kappa=\frac{\xi\beta}{\omega\Delta t} \tag{۱۱}$$

و :

$$\{L\}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\beta}{\omega^2\Delta t^2}\\ \dfrac{\beta}{2\omega^2\Delta t}\\ \dfrac{\beta}{6\omega^2}\end{Bmatrix} \tag{۱۲}$$

در کتب معرفی کنندهٔ روشهای انتگرال گیری مستقیم، بویژه روشهای ویلسون و نیومارک، توصیه شده است تا شتاب محاسبه شده در لحظه $t+\Delta t$ با برقراری رابطه تعادل دینامیکی در این لحظه به دست آید؛ با این دیدگاه که این کار از انباشته شدن خطای ناشی از فرضیات انتگرال گیری جلوگیری و تعادل دینامیکی را تأمین خواهد نمود. با در نظر گرفتن این اصلاحیه، رابطه چرخشی در روش ویلسون به صورت رابطه (۱۳) به دست می آید:

$$\begin{Bmatrix}\ddot{x}_{t+\Delta t}\\ \dot{x}_{t+\Delta t}\\ x_{t+\Delta t}\end{Bmatrix}=[A]\begin{Bmatrix}\ddot{x}_t\\ \dot{x}_t\\ x_t\end{Bmatrix}+\{L\}\begin{Bmatrix}r_t\\ r_{t+\Delta t}\end{Bmatrix} \tag{۱۳}$$

در رابطه (۱۳)، ماتریس تقریب انتگرال گیری به صورت رابطه (۱٤) تعریف شده است:

$$[A]=\begin{bmatrix}(w_{11}) & \dfrac{1}{\Delta t}(w_{12}) & \dfrac{1}{\Delta t^2}(w_{13})\\ \Delta t(w_{21}) & (w_{22}) & \dfrac{1}{\Delta t}(w_{23})\\ \Delta t^2(w_{31}) & \Delta t(w_{32}) & (w_{33})\end{bmatrix} \tag{۱٤}$$

ضرایب w_{11} الی w_{33} نیز به صورت رابطه های (۱۵)، (۱٦) و (۱۷) تعریف می شوند:

$$w_{ij}=-2\xi\omega\Delta t\left(w_{2j}\right)-\omega^2\Delta t^2\left(w_{3j}\right)\qquad j=1,2,3 \tag{۱۵}$$

$$w_{21}=1-\frac{1}{2\theta}-\frac{\beta\theta^2}{6}-\frac{\kappa\theta}{2}\quad w_{22}=1-\frac{\beta\theta}{2}-\kappa\quad w_{23}=-\frac{\beta}{2} \tag{۱٦}$$

$$w_{31}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6\theta}-\frac{\beta\theta}{18}-\frac{\kappa\theta}{6}\quad w_{32}=1-\frac{\beta\theta}{6}-\frac{\kappa}{3}\quad w_{33}=1-\frac{\beta}{6} \tag{۱۷}$$

در رابطه های مذکور، ضرایب β و κ همانهایی هستند که در رابطه (۱۱) تعریف شده اند. ماتریس تابع بار به صورت رابطه های (۱۸) و (۱۹) به دست می آید:

$$[L]=\begin{bmatrix}\gamma(1-\theta) & (1+\gamma\theta)\\ \dfrac{\beta}{2\omega^2\Delta t}(1-\theta) & \dfrac{\beta}{2\omega^2\Delta t}\theta\\ \dfrac{\beta}{6\omega^2(1-\theta)} & \dfrac{\beta}{6\omega^2}\theta\end{bmatrix} \tag{۱۸}$$

$$\gamma=-\kappa-\frac{\beta}{6} \tag{۱۹}$$

اصلاحیه پیشنهاد شده در این مقاله را می توان به سادگی به روش ویلسون اعمال نمود. این امر با اصلاح طرف دوم رابطه (۸) امکان پذیر است. برای این منظور طرف دوم رابطه (۸) به صورت رابطه (۲۰) بازنویسی می گردد:

$$r_{t+\theta\Delta t}=r_t+\theta\left(r_{t+\Delta t}-r_t\right) \tag{۲۰}$$

در روش پیشنهادی، بار پسماند به جا مانده از گام بارگذاری پیشین از بردار بارگذاری موثر کسر می گردد. بار پسماند در لحظه t ام از رابطه (۲۱) به دست می آید:

$$\Delta r_t=\ddot{x}_t+2\xi\omega\dot{x}_t+\omega^2x_t-r_t \tag{۲۱}$$

در این صورت بردار بارگذاری موثر به صورت رابطه های (۲۲) و (۲۳) محاسبه خواهد شد:

$$r_{t+\theta\Delta t}=r_t+\theta\left(r_{t+\Delta t}-r_t-\Delta r_t\right) \tag{۲۲}$$

یا:

$$r_{t+\theta\Delta t}=r_t+\theta r_{t+\Delta t}-\theta\left(\ddot{x}_t+2\xi\omega\dot{x}_t+\omega^2x_t\right) \tag{۲۳}$$

با جایگزینی رابطه بالا در رابطه (۹) و فاکتورگیری مجدد، رابطه های اصلاح شده به صورت رابطه های (۲٤) و (۲۵) به دست می آیند:

$$\begin{Bmatrix}\ddot{x}_{t+\Delta t}\\ \dot{x}_{t+\Delta t}\\ x_{t+\Delta t}\end{Bmatrix}=[A]\begin{Bmatrix}\ddot{x}_t\\ \dot{x}_t\\ x_t\end{Bmatrix}+[L]\begin{Bmatrix}r_t\\ r_{t+\Delta t}\end{Bmatrix} \tag{۲٤}$$

(۲۵)

$$[A]=\begin{bmatrix}1-\dfrac{\beta\theta^2}{3}-\dfrac{1}{\theta}-\kappa\theta-\dfrac{\theta\beta}{\omega^2\Delta t^2} & \dfrac{1}{\Delta t}(-\beta\theta-2\kappa\theta) & \dfrac{1}{\Delta t^2}(-\beta-\beta\theta)\\ \Delta t\left(1-\dfrac{1}{2\theta}-\dfrac{\beta\theta^2}{6}-\dfrac{\kappa\theta}{2}-\dfrac{\theta\beta}{2\omega^2\Delta t^2}\right) & 1-\dfrac{\beta\theta}{2}-\kappa-\kappa\theta & \dfrac{1}{\Delta t}\left(-\dfrac{\beta}{2}-\dfrac{\beta\theta}{2}\right)\\ \Delta t^2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6\theta}-\dfrac{\beta\theta^2}{18}-\dfrac{\kappa}{6}-\dfrac{\theta\beta}{6\omega^2\Delta t^2}\right) & \Delta t\left(1-\dfrac{\beta\theta}{6}-\dfrac{\kappa}{3}-\dfrac{\kappa\theta}{3}\right) & 1-\dfrac{\beta}{6}-\dfrac{\beta\theta}{6}\end{bmatrix}$$

پارامترهای κ و β همان پارامترهای تعریف شده در رابطه (۱۱) می باشند. تابع بارگذاری نیز به صورت رابطه (۲٦) به دست می آید:

$$[L]=\begin{bmatrix}\dfrac{\beta}{\omega^2\Delta t^2} & \dfrac{\beta\theta}{\omega^2\Delta t^2}\\ \dfrac{\beta}{2\omega^2\Delta t} & \dfrac{\beta\theta}{2\omega^2\Delta t}\\ \dfrac{\beta}{6\omega^2} & \dfrac{\beta\theta}{6\omega^2}\end{bmatrix} \tag{۲٦}$$

۳-۱-۲- روش نیومارک

در روش انتگرال گیری نیومارک، رابطه تعادل (۱) در زمان $t+\Delta t$ در نظر گرفته می شود. از این رو خواهیم داشت:

$$\ddot{x}_{t+\Delta t}+2\xi\omega\dot{x}_{t+\Delta t}+\omega^2 x_{t+\Delta t}=r_{t+\Delta t} \qquad (۲۷)$$

رابطه های (۲۸) و (۲۹) نیز برای به دست آوردن سرعت و تغییرمکان در زمان $t+\Delta t$ به کار می‌روند:

$$\dot{x}_{t+\Delta t}=\dot{x}_t+\left[(1-\delta)\,\ddot{x}_t+\delta\ddot{x}_{t+\Delta t}\right]\Delta t \qquad (۲۸)$$

$$x_{t+\Delta t}=x_t+\dot{x}_t\Delta t+\left[\left(\tfrac{1}{2}-\alpha\right)\ddot{x}_t+\alpha\ddot{x}_{t+\Delta t}\right]\Delta t^2 \qquad (۲۹)$$

در رابطه های مذکور، پارامترهای δ و α به گونه ای انتخاب می شوند که بهترین شرایط پایداری و دقت را تأمین نمایند. نیومارک روش شتاب ثابت متوسط را که در آن $\delta=1/2$ و $\alpha=1/4$ است را به عنوان روش پایدار بدون قید و شرط معرفی نمود [٤].

با جایگزینی $\dot{x}_{t+\Delta t}$ و $x_{t+\Delta t}$ در رابطه (۲۷)، می توان معادله را بر حسب $\ddot{x}_{t+\Delta t}$ حل و سپس در روابط (۲۸) و (۲۹) جایگزین- نمود تا مقادیر $\dot{x}_{t+\Delta t}$ و $x_{t+\Delta t}$ به دست آیند. با استفاده از مقادیر به دست آمده، رابطه (۳۰) را می توان نوشت:

$$\begin{Bmatrix}\ddot{x}_{t+\Delta t}\\ \dot{x}_{t+\Delta t}\\ x_{t+\Delta t}\end{Bmatrix}=[A]\begin{Bmatrix}\ddot{X}_t\\ \dot{X}_t\\ X_t\end{Bmatrix}+[L]r_{t+\Delta t} \qquad (۳۰)$$

که در آن:

(۳۱)

$$[A]=\begin{bmatrix}-(1-2-\alpha)\beta-2(1-\delta)\kappa & \frac{1}{\Delta t}(-\beta-2\kappa) & \frac{1}{\Delta t^2}(-\beta)\\ \Delta t[1-\delta-(1/2-\alpha)\delta\beta-2(1-\delta)\delta\kappa] & 1-\beta\delta-2\delta\kappa & \frac{1}{\Delta t}(-\beta\delta)\\ \Delta t^2[1/2-\alpha-(1/2-\alpha)\alpha\beta-2(1-\delta)\alpha\kappa] & \Delta t(1-\alpha\beta-2\alpha\kappa) & (1-\alpha\beta)\end{bmatrix}$$

$$\beta=\left(\frac{1}{\omega^2\Delta t^2}+\frac{2\xi\delta}{\omega\Delta t}+\alpha\right)^{-1}\qquad \kappa=\frac{\xi\beta}{\omega\Delta t} \qquad (۳۲)$$

و:

$$\{L\}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\beta}{\omega^2\Delta t^2}\\ \dfrac{\beta\delta}{\omega^2\Delta t}\\ \dfrac{\alpha\beta}{\omega^2}\end{Bmatrix} \qquad (۳۳)$$

رابطه نزدیک بین توابع نیومارک در روابط (۳۱) و (۳۳) و عملگرهای ویلسون در روابط (۱۰) و (۱۲) جالب توجه است. انتخاب $\delta=1/2$، $\alpha=1/6$ و $\theta=1.0$ باعث می شود تا تقریبهای انتگرال گیری و توابع بار مشابهی از هر دو روش به دست آید. از آنجایی که انتخاب پارامترهای مذکور فرض شتاب با تغییرات خطی را مطرح می کند، نتیجه مذکور قابل پیش بینی بود.

با در نظر گرفتن اصلاحیه شتاب، روابط توصیه شده در روش استاندارد نیومارک به صورت رابطه (۳٤) به دست می آیند:

$$\begin{Bmatrix}\ddot{x}_{t+\Delta t}\\ \dot{x}_{t+\Delta t}\\ x_{t+\Delta t}\end{Bmatrix}=[A]\begin{Bmatrix}\ddot{x}_t\\ \dot{x}_t\\ x_t\end{Bmatrix}+[L]r_{t+\Delta t} \qquad (۳٤)$$

در رابطه (۳٤)، ماتریس تقریب انتگرال گیری به صورت رابطه (۳۵) تعریف می شود:

$$[A]=\begin{bmatrix}(n_{11}) & \frac{1}{\Delta t}(n_{12}) & \frac{1}{\Delta t^2}(n_{13})\\ \Delta t(n_{21}) & (n_{22}) & \frac{1}{\Delta t}(n_{23})\\ \Delta t^2(n_{31}) & \Delta t(n_{32}) & (n_{33})\end{bmatrix} \qquad (۳۵)$$

ضرایب n_{11} الی n_{33} نیز به صورت رابطه های (۳٦)، (۳۷) و (۳۸) تعریف می شوند:

$$n_{1j}=-2\xi\omega\Delta t(n_{2j})-\omega^2\Delta t^2(n_{3j})\qquad j=1,2,3 \qquad (۳٦)$$

$$n_{21}=1-\delta-(0.5-\alpha)\delta\beta-2(1-\delta)\delta\kappa\qquad n_{22}=1-\beta\delta-2\delta\kappa \qquad (۳۷)$$
$$n_{23}=-\beta\delta$$

(۳۸)
$$n_{31}=0.5-\alpha-(0.5-\alpha)\alpha\beta-2(1-\delta)\alpha\kappa\qquad n_{32}=1-\alpha\beta-2\alpha\kappa$$
$$n_{33}=1-\alpha\beta$$

در رابطه های مذکور، ضرایب β و κ همان ضرایب تعریف شده در رابطه (۳۲) می‌باشند. بردار تابع بار نیز به صورت رابطه (۳۹) به دست می آید:

$$\{L\}=\begin{Bmatrix}1-2\kappa-\alpha\beta\\ \dfrac{\beta\delta}{\omega^2\Delta t}\\ \dfrac{\alpha\beta}{\omega^2}\end{Bmatrix} \qquad (۳۹)$$

روش به کار رفته برای به دست آوردن رابطه های اصلاح‌شده نیومارک، مشابه با روش ویلسون اصلاح شده است. طرف دوم رابطه (۲۷) به صورت رابطه های (٤۰) و (٤۱) بازنویسی می شود:

$$\ddot{x}_{t+\Delta t}+2\xi\omega\dot{x}_{t+\Delta t}+\omega^2 x_{t+\Delta t}=R_{t+\Delta t} \qquad (٤۰)$$

$$R_{t+\Delta t}=r_{t+\Delta t}-\Delta r_t \qquad (٤۱)$$

در روابط مزبور، Δr_t توسط رابطه (۲۱) تعیین می شود. با

جایگزینی رابطه (۴۱) در رابطه (۳۰) و فاکتورگیری مجدد، رابطه های اصلاح شده نیومارک به صورت رابطه های (۴۲) و (۴۳) به دست می آیند:

$$R_{t+\Delta t} = r_{t+\Delta t} + r_t - \left(\ddot{x}_t + 2\xi\omega\dot{x}_t + \omega^2 x_t\right) \qquad (۴۲)$$

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_{t+\Delta t} \\ \dot{x}_{t+\Delta t} \\ x_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = [A]\begin{Bmatrix} \ddot{x}_t \\ \dot{x}_t \\ x_t \end{Bmatrix} + [L]\begin{Bmatrix} r_t \\ r_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} \qquad (۴۳)$$

که در آن:

(۴۴)

$$[A] = \begin{bmatrix} -(1-2\alpha)\beta - 2(1-\delta)\kappa - \dfrac{\beta}{\omega^2\Delta t^2} & \dfrac{1}{\Delta t}(-\beta-4\kappa) & \dfrac{1}{\Delta t^2}(-2\beta) \\ \Delta t\left[1-\delta-(1/2-\alpha)\delta\beta - 2(1-\delta)\delta\kappa - \dfrac{\beta\delta}{\omega^2\Delta t^2}\right] & 1-\beta\delta-4\delta\kappa & \dfrac{1}{\Delta t}(-2\beta\delta) \\ \Delta t^2\left[1/2-\alpha-(1/2-\alpha)\alpha\beta - 2(1-\delta)\alpha\kappa - \dfrac{\alpha\beta}{\omega^2\Delta t^2}\right] & \Delta t(1-\alpha\beta-4\alpha\kappa) & (1-2\alpha\beta) \end{bmatrix}$$

در رابطه (۴۴)، مقادیر β و κ، همان مقادیر ارائه شده در روابط (۳۲) می‌باشند. ماتریس تابع بار به‌صورت رابطه (۴۵) به‌دست می آید:

$$[L] = \begin{bmatrix} \dfrac{\beta}{\omega^2\Delta t^2} & \dfrac{\beta}{\omega^2\Delta t^2} \\ \dfrac{\beta\delta}{\omega^2\Delta t} & \dfrac{\beta\delta}{\omega^2\Delta t} \\ \dfrac{\alpha\beta}{\omega^2} & \dfrac{\alpha\beta}{\omega^2} \end{bmatrix} \qquad (۴۵)$$

۲-۳- تحلیل پایداری

هرگاه شعاع طیفی ماتریس تقریب انتگرال، [A]، به‌صورت رابطهٔ (۴۶) تعریف گردد که در آن λ_i، iاُمین مقدار ویژه ماتریس تقریب انتگرال باشد:

$$\rho[A] = max|\lambda_i|; \quad i = 1,2,... \qquad (۴۶)$$

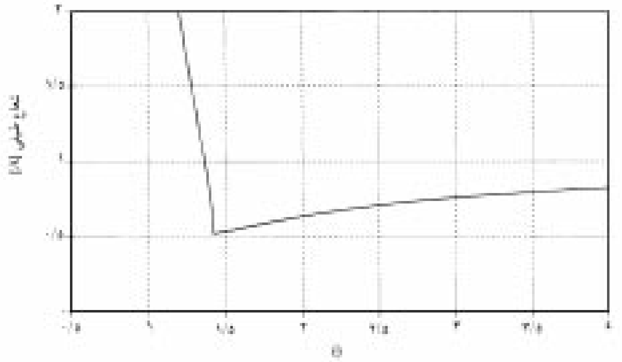
می‌توان نشان داد که پایداری روش انتگرال گیری تنها در صورتی تأمین خواهد شد که $\rho[A] \le 1$ باشد [۲]. این همان معیار پایداری است که در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است. بعلاوه، هر قدر مقدار شعاع طیفی کوچکتر باشد، همگرایی سریعتر انجام خواهد شد.

مشاهده می‌شود که شعاع طیفی و در نتیجه پایداری روش انتگرال‌گیری تنها برحسب نسبت $\Delta t/T$، نسبت میرایی (ξ) و پارامترهای استفاده شده در انتگرال گیری است. از این رو می توان برای مقادیر معلوم $\Delta t/T$ در روشهای ویلسون و نیومارک، پارامترهای θ، α و δ را به گونه ای تنظیم نمود که بهترین شرایط همگرایی و دقت تأمین گردند.

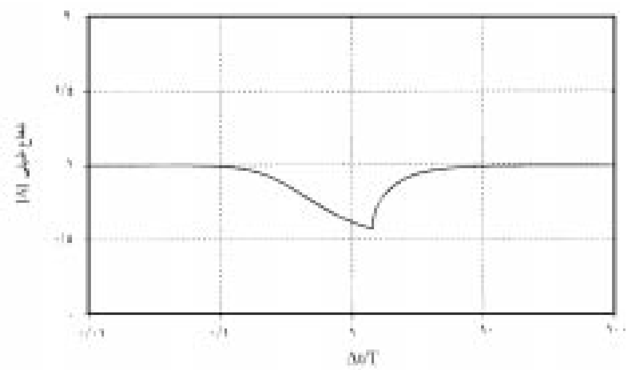
۳-۲-۱- پایداری روش استاندارد ویلسون

پایداری روش ویلسون را می‌توان با استفاده از ماتریس تقریب انتگرال رابطه (۱۰) بررسی نمود. در این بررسی برای سادگی، مقدار نسبت میرایی (ξ) برابر با صفر انتخاب شده است. البته برای نسبتهای کوچک میرایی، معیار پایداری تقریباً ثابت است.

هرگاه تغییرات شعاع طیفی ماتریس تقریب انتگرال (رابطه ۱۰) برحسب متغیر θ ترسیم شود (شکل ۱)، مشاهده می شود که به ازای $\theta \ge 1.367$، همواره $\rho(A) \le 1$ بوده و در نتیجه شرایط پایداری بدون قید و شرط تأمین خواهد شد. تغییرات شعاع طیفی ماتریس رابطه (۱۰) به ازای $\theta = 1.367$ و برای $0.01 \le \Delta t/T \le 100$ در شکل (۲)



شکل (۱): نمودار تغییرات شعاع طیفی ماتریس تقریب در روش ویلسون برحسب θ برای $\Delta t/T \to \infty$



شکل (۲): نمودار تغییرات شعاع طیفی ماتریس تقریب در روش ویلسون برای نسبت میرایی صفر

نشان داده شده است. مشاهده می شود که شرط پایداری دائمی تأمین‌شده است.

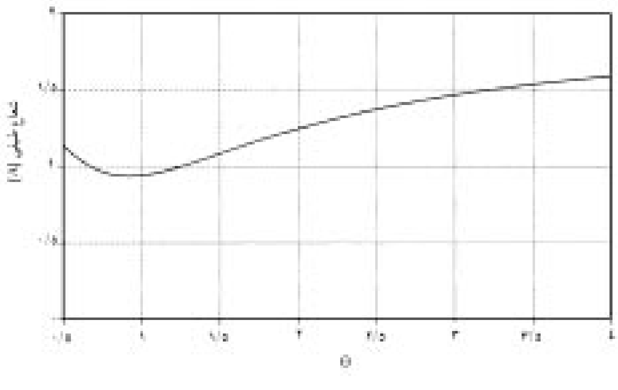
۳-۲-۲- اثر محاسبه شتاب لحظه $t+\Delta t$ از تعادل دینامیکی

در کتب معرفی کنندهٔ روشهای انتگرال گیری مستقیم بویژه روشهای ویلسون و نیومارک، توصیه شده است تا شتاب محاسبه شده در لحظه $t+\Delta t$، با برقراری رابطه تعادل دینامیکی در این لحظه به دست آید.

در این صورت ماتریس تقریب انتگرال در روش ویلسون به شکل رابطه (۱۴) ارائه خواهد شد. بررسیهای انجام شده در این پژوهش مبیّن آن است که استفاده از رابطه (۱۴) که در بیشتر کتابهای دینامیکی سازه ها به عنوان روش استاندارد ویلسون توصیه شده است، پایداری روش را بشدت دگرگون ساخته به نحوی که:

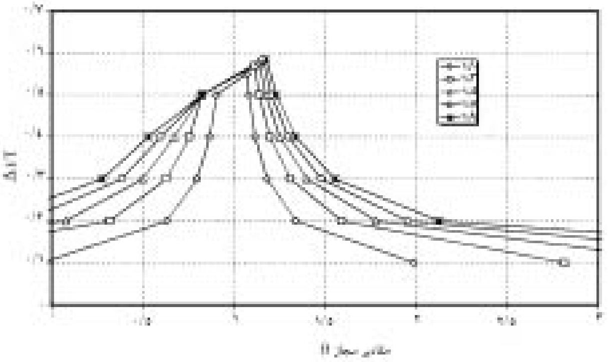
- روش ویلسون از پایدار بدون قید و شرط، به یک روش پایدار مشروط تبدیل شده است؛
- مقدار نسبت میرایی (ξ) در تعیین دامنه مجاز ($\Delta t/T$) نقش تعیین کننده خواهد داشت. در این حالت بیشترین مقدار $\Delta t/T$ محدود به $\sim 1/17$ خواهد شد و به ازای مقادیر بزرگتر از این حد، روش به سرعت واگرا می‌شود.

نمودار تغییرات شعاع طیفی ماتریس تقریب انتگرال در این حالت (رابطه ۱۴) برحسب متغیر θ به ازای $\Delta t/T = 0.4$ و $\xi = 0.05$ در شکل (۳) نشان داده شده است. شکل (۳) نشان می‌دهد که مقدار مجاز θ برای تأمین $\rho(A) \le 1$ بین $0.673 \le \theta \le 1.251$ به دست می‌آید. البته این محدوده بسته به مقدار ξ و $\Delta t/T$، متغیر است. نکته ای که در بررسی این نمودار مشاهده می‌شود آن است که مقدار مجاز θ می‌تواند حتی کوچکتر از یک نیز انتخاب شود. مقدار بهینه θ با بررسی میزان دقت الگوریتم انتخاب خواهد گردید.



شکل (۳): نمودار تغییرات شعاع طیفی روش ویلسون با محاسبه شتاب لحظه $t+\Delta t$ از تعادل دینامیکی برای $\xi = 0.05$ و $\Delta t/T = 0.4$

در شکل (۴) دامنه مجاز θ به ازای نسبتهای مختلف میرایی و مقادیر مختلف $\Delta t/T$ ترسیم شده است. ملاحظه می‌شود که با افزایش نسبت میرایی، دامنه مجاز θ افزایش یافته و با افزایش نسبت $\Delta t/T$، دامنه مجاز θ کاهش می‌یابد. به ازای یک میرایی ثابت، محدوده مجاز به شکل زنگوله ای است که مقدار بیشینه آن حول حدود $\theta = 1$ می‌باشد و همان گونه که عنوان گردید، مقدار بیشینه $\Delta t/T$ در این روش به حدود $1/1.7$ محدود خواهد شد. در مجموع، استفاده از رابطه تعادل دینامیکی برای برآورد شتاب در ابتدای هر گام زمانی،

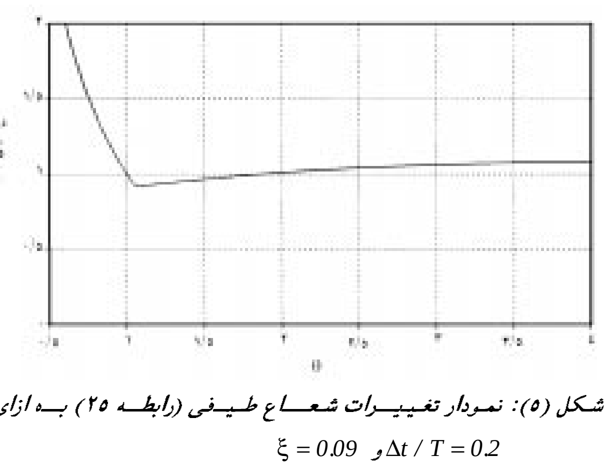


شکل (۴): نمودار تغییرات θ مجاز بر حسب مقادیر مختلف میرایی و $\Delta t/T$ در روش استاندارد ویلسون

الگوریتم را بشدت تحت تأثیر قرار داده است. به عبارت دیگر، هنگام استفاده از روش ویلسون با محاسبه بردار شتاب لحظهٔ $t+\Delta t$ برای تعادل دینامیکی، انتظار واگرایی جوابها می‌رود و باید برای پرهیز از این موضوع، مقدار بهینه θ برای هر سازه ای جداگانه به دست آید و نمی‌توان یک مقدار ثابت را در برنامه های رایانه ای منظور نمود.

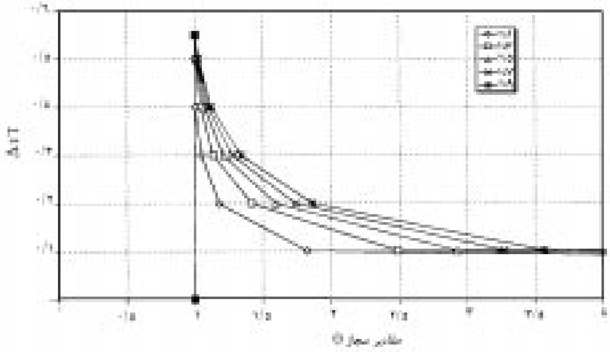
۳-۲-۳- پایداری روش اصلاح شدهٔ ویلسون

بررسیهای انجام شده بر روی روش اصلاح شده ویلسون (رابطه ۲۵) نشان می‌دهند که این روش نیز مانند روش استاندارد ویلسون که در آن اصلاحیه شتاب منظور شده باشد، یک روش پایدار مشروط است. در شکل (۵) تغییرات شعاع طیفی ماتریس [A]، برحسب θ به ازای $\Delta t/T = 0.2$ و $\xi = 0.09$ نشان داده شده است. دیده می‌شود که هرگاه $1 \le \theta \le 1.862$ انتخاب شود، شرط پایداری ($\rho(A) \le 1$) در این حالت تأمین می‌شود.



شکل (۵): نمودار تغییرات شعاع طیفی (رابطه ۲۵) به ازای $\Delta t / T = 0.2$ و $\xi = 0.09$

در شکل (٦) دامنه مجاز θ برای نسبتهای میرایی مختلف و $\Delta t / T$ های گوناگون، در روش اصلاح شده ویلسون، محاسبه و ارائه شده‌است. مشاهده می‌شود که حد پایین دامنه مجاز θ برای حالات



شکل (٦): نمودار تغییرات θ مجاز بر حسب مقادیر مختلف میرایی و $\Delta t / T$ در روش ویلسون اصلاح شده

مختلف، یکسان و برابر با یک به دست می‌آید؛ در صورتی که این مقدار برای روش استاندارد ویلسون (شکل ٤) بسته به میرایی و گام زمانی، متفاوت است. مشاهده می‌شود که به ازای مقادیر $\Delta t / T < 0.1$ ، دامنه پارامتر θ تنها شامل یک حد پایین برابر با یک است. قابل ذکر است که در این روش مقدار بیشینه $\Delta t / T$ برابر با $1/1.8$ خواهد بود.

٣-٢-٤- پایداری روش استاندارد نیومارک

در روش نیومارک، دو متغیر α و δ به گونه ای باید انتخاب‌شوند تا شرایط بهینه پایداری را تأمین نمایند. هرگاه شعاع طیفی ماتریس [A] در روش نیومارک (رابطه ٣١) محاسبه شده و برابر با یک قرار داده شود آنگاه پایداری بدون قید و شرط هنگامی تأمین خواهد‌شد که $\alpha \ge 0.25(\delta + 0.5)^2$ و $\delta \ge 0.5$ باشد. توصیه شده است که در عمل مقدار $\delta = 0.5$ و مقدار $\alpha = 0.25$ انتخاب شود. با انتخاب این مقادیر، الگوریتم، تبدیل به حالت شتاب متوسط ثابت در هر گام زمانی خواهد شد. در این صورت همواره $\rho[A] = 1$ به دست خواهد آمد.

البته، در این حالت نیز توصیه شده است که برای پرهیز از انباشته شدن خطا، مقدار شتاب در ابتدای هر گام با برقراری رابطه تعادل دینامیکی به دست آید. در این صورت، ماتریس تقریب انتگرال به شکل رابطه (٣٥) ارائه خواهد شد. جالب توجه است که این اصلاحیه تغییرات قابل ملاحظه‌ای در شرایط پایداری الگوریتم نداشته و حتی به ازای $\xi > 0$، همگرایی سریعتر نیز صورت خواهد پذیرفت. با در نظر گرفتن این موارد، روش استاندارد نیومارک همواره پایدار است. بررسیهای انجام شده نشانه آن است که مقادیر ویژه ماتریس تقریب انتگرال در این حالت (رابطه ٤٤) به ازای $\alpha = 0.25$ و $\delta = 0.5$ ، مشابه روش استاندارد نیومارک به دست می‌آید. به عبارت دیگر، همواره $\rho[A] \le 1$ می‌باشد. از این رو این روش با انتخاب این مقادیر نیز مانند روش استاندارد نیومارک، بدون قید و شرط است.

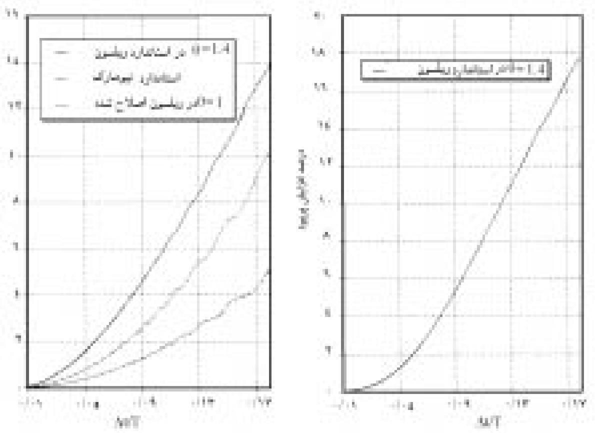
٣-٣- دقت تحلیل

به منظور بررسی دقت روشهای انتگرال‌گیری در اینجا به حل مسأله مقادیر اولیه پرداخته شده است. مسأله مقدار اولیه را می‌توان به صورت رابطه (٤٧) تعریف نمود:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ x_0 = 1.0 \quad \dot{x}_0 = 0.0 \quad \ddot{x}_0 = -\omega^2 \end{cases} \qquad (٤٧)$$

در این حالت، حل دقیق مسأله به صورت $x = \cos \omega t$ ارائه می‌شود. حل عددی رابطه (٤٧) با الگوریتم های مختلف نشان می‌دهد که خطاهای به دست آمده در روش انتگرال گیری مستقیم را می‌توان به دو گروه افزایش پریود و کاهش دامنه دسته بندی نمود.

بررسی نمودار در شکل (٧) نشان می‌دهد که در حالت کلی، هنگامی که $\Delta t / T$ از حدود 0.01 کوچکتر باشد، انتگرال‌گیری عددی با استفاده از کلیه روشها، دقیق خواهد بود. حال آنکه اگر این نسبت بزرگ باشد، روشهای مختلف انتگرال‌گیری، ویژگیهای متفاوتی از خود نشان می‌دهند.



شکل (٧): درصد افزایش پریود و کاهش دامنه

٣-٣-١- بررسی دقیقتر در روش ویلسون

در این پژوهش دیده شد که استفاده از ماتریس تقریب انتگرال به صورت رابطه (١٤) در حل عددی سیستم های دینامیکی تنها به بروز افزایش پریود در جوابها منجر می‌گردد و کاهش دامنه در این روش بکلی حذف می‌شود. نمودار تغییرات خطای افزایش پریود برحسب

$\Delta t/T$، در شکل (۷) برای نسبت میرایی صفر و $\theta = 1.0$ ترسیم شده- است. ملاحظه می‌گردد که میزان خطای به‌دست آمده نسبت به روش قبلی حدود ۶۷٪ کاهش پیدا کرده است و خطای کاهش دامنه نیز حذف شده است. از این رو، پارامتر θ باید تنها برای کاهش مناسب خطای پریود تنظیم گردد. در این پژوهش برای به دست آوردن مقدار بهینه پارامتر θ، از یک برنامه رایانه ای در محیط *MATCAD* برای بهینه سازی بهره گرفته شده است. در این برنامه مقدار بهینه این پارامتر طوری محاسبه شده است که مقدار افزایش پریود به ازای نسبت میرایی انتخابی و نسبت $\Delta t/T$ کمینه گردد.

مقادیر بهینه محاسبه شده در جدول (۱) نشان داده شده‌اند. ملاحظه- می‌شود که مقدار بهینه برای میرایی صفر برابر با یک و برای میرایی بزرگتر از صفر، در بیشتر موارد کوچکتر از یک می‌باشد. استفاده از این مقادیر بهینه، خطای افزایش پریود را به نحو چشمگیری کاهش- می‌دهد. به عنوان نمونه خطای افزایش پریود به ازای $\Delta t/T = 0.1$، میرایی ۵٪ و $\theta = 1.4$ برابر با ۲۵/۳٪ به دست می‌آید و حال آنکه اگر $\theta = 0.67$ انتخاب شود، میزان این خطا به حدود $۲/۸۲ \times ۱۰^{-۹}$ یا تقریباً صفر کاهش پیدا می‌کند. هرگاه $\Delta t/T \leq 0.2$ انتخاب شود، آنگاه می‌توان به طور متوسط مقدار پارامتر θ را برابر ۰/۶۷۲ اختیار- نمود. در این صورت، میزان خطای افزایش پریود به نزدیکی صفر کاهش خواهد یافت. از این رو، با استفاده از این مقادیر می‌توان خطاهای به وجود آمده در تحلیل را بکلی حذف نمود.

جدول (۱): مقادیر بهینه θ به ازای مقادیر مختلف میرایی و $\Delta t/T$

$\Delta t / T$	نسبت میرایی (ξ)					
	٪۰	٪۱	٪۳	٪۵	٪۷	٪۹
۰/۱	۱	۰/۶۶۶	۰/۶۶۹	۰/۶۷۲	۰/۶۷۴	۰/۶۷۷
۰/۲	۱	۰/۶۶۲	۰/۶۶۷	۰/۶۷۳	۰/۶۷۹	۰/۶۸۶
۰/۳	۱	۰/۸۰۰	۰/۶۳۰	۰/۶۲۲	۰/۶۳۴	۰/۶۴۶
۰/۴	۱	۰/۸۷۰	۰/۷۶۰	۰/۶۸۰	۰/۶۰۰	۰/۵۴۰
۰/۵	۱	۰/۹۱۰	۰/۸۳۰	۰/۸۳۰	۰/۸۳۰	۰/۸۳۰
۰/۵۵	۱	۱/۰۷۱	۱/۱۱۲	۱/۱۳۸	۱/۱۵۸	۱/۱۷۸

بررسی دقت رابطه پیشنهادی ویلسون (رابطه ۲۴) نشان می‌دهد که این روش تنها شامل خطای افزایش پریود بوده و خطای کاهش دامنه در این روش مشاهده نمی‌شود. نمودار تغییرات خطای افزایش پریود منطبق بر نمودار به دست آمده از روش ویلسون با اصلاحیه شتاب می‌باشد. مقدار بهینه θ در کلیه حالات برابر با یک به دست می‌آید. به عبارت دیگر، روش پیشنهادی، معادل روش فرض تغییرات خطی شتاب در بازه زمانی Δt می‌باشد و دیگر نیازی به در نظر گرفتن θ نیست. در مقام مقایسه، توانایی روش استاندارد ویلسون با اصلاحیه شتاب برای کاهش خطای افزایش پریود بیشتر از روش ویلسون اصلاح شده است.

۳-۳-۲- بررسی دقت در روش نیومارک

روش انتگرال گیری نیومارک (رابطه ۳۱) تنها شامل خطای افزایش پریود است. نمودار تغییرات این خطا در شکل (۷) نشان داده شده- است. مشاهده می‌شود که نمودار خطای روش نیومارک بین دو نمودار استاندارد ویلسون و ویلسون اصلاح شده قرار می‌گیرد. هرگاه اصلاحیه شتاب در ابتدای هرگام زمانی به منظور برقراری تعادل دینامیکی در این روش مورد استفاده قرار گیرد (رابطه ۳۵) هیچ گونه تغییری در دقت روش دیده نخواهد شد و کماکان نمودار تغییرات خطای افزایش پریود مشابه با نمودار شکل (۷) به دست خواهد آمد.

بررسیهای انجام شده بر ماتریس تقریب انتگرال در این حالت (رابطه ۴۴) نشان می‌دهند که هیچ گونه تغییری در میزان دقت این روش نسبت به استاندارد نیومارک به وجود نمی‌آید. همانند روش استاندارد نیومارک، خطای کاهش دامنه مشاهده نشده و خطای افزایش پریود نیز کماکان با نمودار شکل (۷) ارائه خواهد شد.

۴- نتیجه گیری

اهم نتایج بررسیهای انجام شده عبارتند از:

۱- اعمال اصلاحیه شتاب و یا اضافه کردن بردار بار پسماند در ابتدای هر گام زمانی، پایداری نامشروط روش ویلسون را به پایداری مشروط تبدیل می‌کند؛ لیکن، دقت روش را بالا می‌برد به طوری که می‌توان با انتخاب مناسب θ، خطا را به میزان مطلوبی کاهش داد. اعمال اصلاحیه شتاب و یا اضافه‌کردن بردار بار پسماند، هیچ گونه تغییری را در معیار پایداری و خطا در روش نیومارک به وجود نیاورده و کماکان این روش پایدار نامشروط باقی می‌ماند.

۲- اعمال بردار بار پسماند، هیچ گونه تأثیری بر روند همگرایی و دقت روش نیومارک ندارد. از این رو توصیه می‌شود که از روش نیومارک اصلاح شده برای تحلیل تاریخچه زمانی سیستم های سازه‌ای استفاده شود.

۵- مراجع

۱- فدائیان، رامین. "ارتعاش چند تکیه گاهی سازه های با دهانه های بزرگ" پایان نامه دکترای مهندسی عمران- سازه واحد علوم و

تحقیقات دانشگاه آزاد اسلامی، ۱۳۷۹.

2.Bathe, K.J., (1975), “Numerical Procedures in Finite Element Analysis”, McGraw-Hill Book Co.

3.Clough, R.W., (1975) “Dynamics of Structures”, Mc Graw Hill.

4.Chopra, A.K.,(1995), “Dynamics of Structures”, Mc Graw Hill.

*hosseini@dena.iiees.ac.ir *ashtiany@dena.iiees.ac.ir ◀