



()

ماتریس های جرم و سختی در نظر داشت، عمومیت ندارد [۱ و ۲].

برای حل این دستگاهها، فاس در سال ۱۹۵۸ با تعریف بردار حالت (*State Vector*) که از سرهم بندی بردارهای سرعت و تغییر مکان به دست می آید، توانست دستگاه معادلات مرتبه دوم ارتعاش بر حسب بردار تغییر مکان را به دستگاه معادلات مرتبه اول بر حسب "بردار حالت" تبدیل - نموده و مقادیر و بردارهای ویژه آن را به دست آورد که برخلاف سیستم های کلاسیک، مختلط می باشند [۳]. به کمک این مقادیر و بردارهای ویژه، فاس موفق شد فرکانس های طبیعی، ضرایب میرایی و شکلهای مدی سیستم را به دست آورد. از آن پس این روش تنها روش مورد قبول تحلیل سیستم های غیر کلاسیک محسوب شد. به عنوان مثال، ایتو اولین بار از این روش برای تحلیل لرزه ای یک نیروگاه اتمی استفاده نمود [۱]. کلاف و مجتهدی نیز در سال ۱۹۷۷ [۴]، در سال ۱۹۸۰ سینگ [۵]، در سال ۱۹۸۳ در کیورگیان و ایگوسا [۶]، در سال ۱۹۸۶ گوپتا و جاو [۷] و غیره با این روش انواع گوناگونی از سیستم های با میرایی نامتناسب را تحت بار زلزله تحلیل نموده اند.

پژوهشگران بسیاری سعی نموده اند تا بر پیچیدگیها و دشواریهای محاسباتی این روش فائق آیند که عموماً نتایج رضایت بخشی در بر نداشته است. در ادامه مقاله روش بردار حالت (به عنوان مرجع) و روشهای جدید ارائه شده اند.

معادله ارتعاش یک سیستم چند درجه آزادی عبارت است از:

$$M\{\ddot{q}(t)\} + C\{\dot{q}(t)\} + K\{q(t)\} = p(t) \quad (1)$$

در مقاله حاضر چهار روش پیشنهادی جدید برای تحلیل مقادیر ویژه حل سیستم های خطی دینامیکی با میرایی نامتناسب (غیر کلاسیک) ارائه و ویژگی آنها از نظر حجم عملیاتی با روش موجود (روش بردار حالت) مقایسه - شده است. روش بردار حالت بر اساس تبدیل دستگاه معادلات مرتبه دوم ارتعاش آزاد سیستم به دستگاه معادلات مرتبه اول، از طریق تشکیل ماتریس هایی با ابعاد دو برابر درجات آزادی سیستم قرار دارد، که به منظور کاهش حجم عملیات روشهای ساده شده جدید مورد بررسی قرار گرفته اند.

فرمولاسیون چهار روش پیشنهادی، ارائه شده و با حل یک مثال نتایج به دست آمده با روش موجود مقایسه - شده اند. از میان این روشهای پیشنهادی، ارجحیت روش "بسط" به دلیل سادگی و برنامه پذیری سریع برای حل سیستم های دینامیکی با میرایی غیر کلاسیک نتیجه گیری شده است.

: میرایی نامتناسب، بردار حالت، معادله مشخصه، ماتریس انتقال شتاب - تغییر مکان، ماتریس انتقال سرعت - تغییر مکان.

فرض کلاسیک یا متناسب بودن ماتریس میرایی سیستم های دینامیک که توسط ریلی برای تحلیل سیستم های دینامیکی در نظر گرفته شده است، عملاً در بسیاری از موارد واقعی مانند سازه های پیچشی، سیستم های مبتنی بر اندرکنش سازه - خاک، سازه - مایعات و سیستم های دینامیکی ثانویه که در آنها نمی توان ماتریس میرایی را به صورت ترکیب خطی از

بر اساس روابط ارائه شده در مرجع [۱]، ماتریس های جرم، سختی و میرایی سیستم پیشنی خواهند شد:

$$M = \begin{bmatrix} 6.11621 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.11621 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.27421 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.09684 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5.09684 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.06184 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 4.69536 \times 10^3 & 0 & -7.04304 \times 10^4 & -1.608 \times 10^3 & 0 & 2.412 \times 10^4 \\ 0 & 1.73307 \times 10^3 & 3.46613 \times 10^4 & 0 & -596.74667 & -1.19349 \times 10^4 \\ -7.04304 \times 10^4 & 3.46613 \times 10^4 & 2.28558 \times 10^8 & 2.412 \times 10^4 & -1.19349 \times 10^4 & -7.83473 \times 10^7 \\ -1.608 \times 10^3 & 0 & 2.412 \times 10^4 & 1.608 \times 10^3 & 0 & -2.412 \times 10^4 \\ 0 & -596.74667 & -1.19349 \times 10^4 & 0 & 596.74667 & 1.19349 \times 10^4 \\ 2.412 \times 10^4 & -1.19349 \times 10^4 & -7.83473 \times 10^7 & -2.412 \times 10^4 & 1.19349 \times 10^4 & 7.83473 \times 10^7 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 22.79454 & 0 & -341.91811 & -9.05302 & 0 & 135.79531 \\ 0 & 13.85165 & 277.03295 & 0 & -5.515 & -110.3 \\ -341.91811 & 277.03295 & 1.26687 \times 10^4 & 135.79531 & -110.3 & -5.03895 \times 10^3 \\ -9.05302 & 0 & 135.79531 & 9.05302 & 0 & -135.79531 \\ 0 & -5.515 & -110.3 & 0 & 5.515 & 110.3 \\ 135.79531 & -110.3 & -5.03895 \times 10^3 & -135.79531 & 110.3 & 5.03895 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

با حل معادله (۳) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه سیستم به دست می آیند. در اینجا مقادیر ویژه، فرکانس ها و شکل مد اول (به عنوان مثال) عبارت خواهند بود از:

$$\lambda_{SV} = \begin{pmatrix} -0.12072 + 46.13759i \\ -0.12072 - 46.13759i \\ -2.26667 + 29.92899i \\ -2.26667 - 29.92899i \\ -0.42758 + 13.18645i \\ -0.42758 - 13.18645i \\ -0.26322 + 8.03197i \\ -0.26322 - 8.03197i \\ -0.0231 + 20.28718i \\ -0.0231 - 20.28718i \\ -1.39709 + 18.23383i \\ -1.39709 - 18.23383i \end{pmatrix}$$

$$\omega_{SV} = \begin{pmatrix} 8.03628 \\ 13.19338 \\ 18.28727 \\ 20.28719 \\ 30.0147 \\ 46.13775 \end{pmatrix}$$

$$I_{\phi_{SV}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.35316 - 0.01337i \\ -0.08203 + 0.03368i \\ -0.5362 - 0.01681i \\ 0.19175 + 0.01566i \\ 0.04375 - 0.01793i \end{pmatrix}$$

که در آن اندیس SV بیانگر روش بردار حالت است.

چهار روش پیشنهادی برای تحلیل سیستم های دینامیکی با میرایی متناسب، در قسمتهای بعدی تشریح گردیده اند.

۴-۱- روش مستقیم (Direct Approach)

در روش پیشنهادی اول، مقادیر و بردارهای ویژه سیستم مستقیماً از معادله مشخصه سیستم به دست می آیند. با فرض

در رابطه (۱)، M ماتریس جرم، C ماتریس میرایی، K ماتریس سختی، $q(t)$ بردار تغییر مکان درجات آزادی سیستم و $p(t)$ تابع نیروی دینامیکی می باشند. به کمک بردار حالت

$$\{Y(t)\} = \begin{Bmatrix} \dot{q}(t) \\ q(t) \end{Bmatrix}$$

معادله (۱) را می توان به رابطه (۲) تبدیل نمود [۳]:

$$A\dot{Y} + BY = \vec{Q} \quad (2)$$

در رابطه (۲) ماتریس های $A_{2n \times 2n}$ و $B_{2n \times 2n}$ و بردار $\vec{Q}_{2n \times 1}$ عبارتند از:

$$A = \begin{bmatrix} O & M \\ M & C \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -M & O \\ O & K \end{bmatrix}, \quad \vec{Q} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ p(t) \end{Bmatrix}$$

با فرض $\{Y(t)\} = \{\psi\}e^{\lambda t}$ معادله مشخصه سیستم به دست می آید:

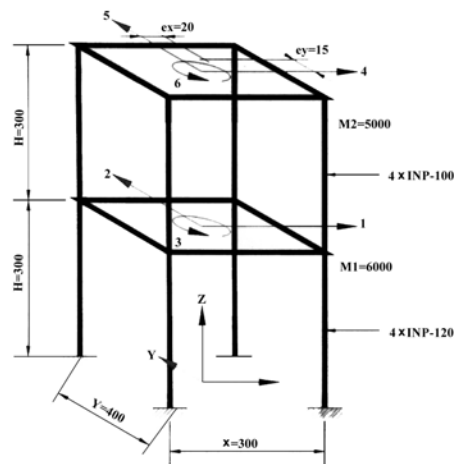
$$e^{\lambda t}[\lambda A + B]\{\psi\} = \vec{0} \Rightarrow |\lambda A + B| = 0 \quad (3)$$

با کمک معادله مشخصه (۳) می توان کلیه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه سیستم را محاسبه نمود:

$$\lambda_j = \lambda_{j+n}^* \quad \psi_j = \psi_{j+n}^* \quad \{\psi\} = \begin{Bmatrix} \lambda_j \{\phi_j\} \\ \{\phi_j\} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

در رابطه (۴)، قسمت پایینی بردار ویژه، $\{\phi_j\}$ ، شکل مد j ام ارتعاش سیستم می باشد.

به منظور مقایسه دقت روشهای پیشنهادی با روش موجود، یک سازه برشی- پیچشی دو طبقه، که در هر طبقه دارای دو درجه آزادی انتقالی و یک درجه آزادی پیچشی می باشد، مطابق شکل (۱) انتخاب شده است:



شکل (۱): سازه دو طبقه برشی- پیچشی (ابعاد برحسب سانتیمتر و جرمها برحسب کیلوگرم)

$$MT\{\ddot{q}\} + C\{\dot{q}\} + K\{q\} = \vec{0} \Rightarrow C\{\dot{q}\} + (MT + K)\{q\} = \vec{0} \quad (7)$$

مشاهده می شود که معادلات مرتبه دوم به یک دستگاه مرتبه اول تبدیل می شود. با بازنویسی رابطه (۶) به صورت: $\{q\} = T^{-1}\{\ddot{q}\}$ و با جایگزینی آن در معادلات حرکت خواهیم داشت:

$$M\{\ddot{q}\} + C\{\dot{q}\} + KT^{-1}\{\ddot{q}\} = \vec{0} \Rightarrow (M + KT^{-1})\{\ddot{q}\} + C\{\dot{q}\} = \vec{0} \quad (8)$$

با مشتق گیری از رابطه (۷) و مقایسه آن با رابطه (۸) می توان نتیجه گیری کرد که به منظور حصول به جوابهای غیر صفر برای $\{\ddot{q}\}$ و $\{\dot{q}\}$ رابطه (۹) باید برقرار باشد:

$$(M + KT^{-1})C^{-1} = C(MT + K)^{-1} \quad (9)$$

معادله (۹) یک معادله ماتریسی درجه دوم بر حسب T است و دارای دو ریشه می باشد. این ریشه ها را می توان با دو رابطه مختلف تکرار (۱۰ و ۱۱) به دست آورد:

$$(10)$$

$$\left(\begin{matrix} M+K & T^{-1} \\ & UNKNOWN \end{matrix} \right) C^{-1} = C \left(\begin{matrix} M & T & +K \\ & KNOWN & \end{matrix} \right)^{-1} \Rightarrow T = M^{-1} \left[C(KT^{-1} + M)^{-1} C - K \right]$$

$$\left(\begin{matrix} M+K & T^{-1} \\ & KNOWN \end{matrix} \right) C^{-1} = C \left(\begin{matrix} M & T & +K \\ & UNKNOWN & \end{matrix} \right)^{-1} \Rightarrow \quad (11)$$

$$T = [C(MT + K)^{-1} C - M]^{-1} K$$

با حل معادلات (۱۰) و (۱۱) در مورد مثال، ریشه های ماتریس انتقال به دست می آیند:

$$T_{AD1} = \begin{pmatrix} 4.92911 \times 10^3 & 1.95158 \times 10^4 & 1.14896 \times 10^3 & 1.09473 \times 10^4 & 2.94075 \times 10^4 & 3.64908 \times 10^3 \\ -86.96404 & -2.70609 \times 10^3 & 2.6474 \times 10^3 & -177.33523 & -996.17928 & 4.48002 \times 10^3 \\ -3.66204 & -17.36751 & -1.7759 \times 10^3 & -8.1119 & -22.46484 & 612.57133 \\ -3.1204 \times 10^3 & -1.13791 \times 10^4 & 52.48587 & -6.75853 \times 10^3 & -1.70788 \times 10^4 & -2.32577 \times 10^3 \\ 53.0542 & 1.3662 \times 10^3 & -1.8759 \times 10^3 & 107.92436 & 182.69851 & -2.5056 \times 10^3 \\ 2.31565 & 9.87575 & 729.14933 & 5.006 & 12.5691 & -732.97083 \end{pmatrix}$$

$$T_{AD2} = \begin{pmatrix} -1.25022 \times 10^3 & -0.20415 & 2.1959 \times 10^4 & 477.5567 & 0.07062 & -8.7044 \times 10^3 \\ -1.76803 \times 10^3 & -30.77644 & 1.42547 \times 10^6 & 716.26541 & 8.23208 & -5.03928 \times 10^5 \\ -0.79603 & -0.02972 & -429.08237 & 0.34336 & 7.96512 \times 10^{-3} & 133.2605 \\ -2.43447 \times 10^3 & 2.70845 & 7.51305 \times 10^4 & 905.78716 & -1.1346 & -3.03424 \times 10^4 \\ -4.11934 \times 10^3 & 58.45753 & -2.44181 \times 10^5 & 1.65906 \times 10^3 & -33.33659 & 4.28371 \times 10^5 \\ -2.20276 & 0.05424 & 444.10609 & 0.9412 & -0.03129 & -299.69754 \end{pmatrix}$$

با بازنویسی رابطه (۶) به صورت: $\{q\} = T\{\ddot{q}\}$ و با جایگزینی $\{q\} = \{\phi\}e^{\lambda t}$ و $\{\ddot{q}\} = \lambda^2 \{\phi\}e^{\lambda t}$ در آن، معادله مشخصه (۱۲) به دست می آید:

$$[\lambda^2 I - T]\{\phi\} = \vec{0} \Rightarrow |\lambda^2 I - T| = 0 \quad (12)$$

با قرار دادن هر یک از ریشه های T در رابطه (۱۲) و حل

در معادله (۱) بدون استفاده از بردار حالت می توان تابع مشخصه (۵) را به دست آورد:

$$e^{\lambda t} [\lambda^2 M + \lambda C + K]\{\phi\} = \vec{0} \Rightarrow f(\lambda) = |\lambda^2 M + \lambda C + K| = 0 \quad (5)$$

با حدس مقادیر اولیه برای λ ، معادله (۵) را می توان با هر روش عددی حل کرد. در مورد مثال از روش سکانت-مولر (Secant-Mueller) برای حل معادله استفاده شده است که نتایج عبارتند از:

$$\lambda_{D1} = -0.12072 - 46.13799i$$

$$\lambda_{D2} = -2.26667 - 29.92899i$$

$$\lambda_{D3} = -0.42758 - 13.18645i$$

$$\lambda_{D4} = -0.26322 - 8.03197i$$

$$\lambda_{D5} = -0.0231 - 20.28718i$$

$$\lambda_{D6} = -1.39709 - 18.23383i$$

با توجه به اینکه معادله (۵) معادله ای درجه دو بر حسب λ است، معادله مشخصه از درجه $2n$ بوده و دارای $2n$ تعداد مقدار ویژه می باشد. این مقادیر ویژه مختلط دقیقاً معادل مقادیر به دست آمده از روش بردار حالت هستند. با استفاده از این معادله، مقادیر ویژه و شکل مد اول سازه مثال به دست می آیند:

$$\lambda_D = \begin{pmatrix} -0.12072 - 46.13759i \\ -2.26667 - 29.92899i \\ -0.42758 - 13.18645i \\ -0.26322 - 8.03197i \\ -0.0231 - 20.28718i \\ -1.39709 - 18.23383i \end{pmatrix} \quad \phi_D = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.35316 - 0.01337i \\ -0.08203 + 0.03368i \\ -0.5362 - 0.01681i \\ 0.19175 + 0.01566i \\ 0.04375 - 0.01793i \end{pmatrix}$$

مشاهده می شود که نتایج مطابقت کامل دارند. اندیس D بیانگر روش پیشنهادی مستقیم است. مهمترین مزیت روش مستقیم این است که با بکارگیری ماتریس های $n \times n$ به جای ماتریس های $2n \times 2n$ عملیات ماتریسی و تعداد حافظه مورد نیاز، در مقایسه با روش بردار حالت به نحو چشمگیری کاهش می یابد.

(Acceleration-Displacement Approach)

در این روش فرض می شود که بردار شتاب سیستم $\{\ddot{q}\}$ به صورت خطی تابعی از بردار تغییر مکان $\{q\}$ است:

$$\{\ddot{q}\} = T\{q\} \quad (6)$$

در رابطه (۶)، T ماتریس انتقال شتاب-تغییر مکان است. با جایگزینی رابطه (۶) در معادله (۱) خواهیم داشت:

معادله (۱۸) یک معادله ماتریسی درجه دوم بر حسب T است و دارای دو ریشه می باشد. این ریشه ها را می توان با دو رابطه مختلف تکرار (۱۹) و (۲۰) به دست آورد:

$$(19)$$

$$M \begin{matrix} T \\ \text{KNOWN} \end{matrix} + C + K \begin{matrix} T^{-1} \\ \text{UNKNOWN} \end{matrix} = 0_{n \times n} \Rightarrow T = -M^{-1}(C + KT^{-1})$$

$$(20)$$

$$M \begin{matrix} T \\ \text{UNKNOWN} \end{matrix} + C + K \begin{matrix} T^{-1} \\ \text{KNOWN} \end{matrix} = 0_{n \times n} \Rightarrow T = -(C + MT)^{-1}K$$

با حل معادلات (۱۹) و (۲۰) در مورد مثال، ریشه های ماتریس انتقال به دست می آیند:

$$T_{VD1} = \begin{pmatrix} -1.23805 \times 10^3 & -3.81617 \times 10^3 & 655.00201 & -2.31899 \times 10^3 & -6.35039 \times 10^3 & -1.86997 \times 10^3 \\ 0.50775 & 147.74113 & -609.14292 & 1.81974 & 80.58945 & -276.98465 \\ 1.54288 & 43.30096 & -145.61644 & 3.11501 & 26.92814 & -73.89649 \\ 660.27973 & 1.84739 \times 10^3 & 362.7995 & 1.23589 \times 10^3 & 3.07097 \times 10^3 & 2.20727 \times 10^3 \\ -0.42065 & -16.19023 & 86.40556 & -1.20232 & 62.20375 & -263.49617 \\ -0.86228 & -6.22278 & 14.49363 & -1.72095 & 13.99492 & -66.99418 \end{pmatrix}$$

$$T_{VD2} = \begin{pmatrix} 1.23432 \times 10^3 & -0.50775 & -3.20874 \times 10^4 & -548.75294 & 0.35054 & 1.49479 \times 10^4 \\ 3.81617 \times 10^3 & -150.00588 & -9.02149 \times 10^5 & -1.53949 \times 10^3 & 14.39356 & 1.08052 \times 10^5 \\ -0.02876 & 0.02706 & 145.51701 & -0.01558 & -2.59059 \times 10^{-3} & -12.03848 \\ 2.78457 \times 10^3 & -2.18368 & -7.7902 \times 10^4 & -1.23767 \times 10^3 & 1.20232 & 3.58797 \times 10^4 \\ 7.62047 \times 10^3 & -95.6253 & -6.73182 \times 10^5 & -3.07097 \times 10^3 & -63.2858 & -2.91582 \times 10^5 \\ 0.10643 & 0.01699 & 88.72325 & -0.10467 & 0.01161 & 66.94673 \end{pmatrix}$$

با بازنویسی رابطه (۱۴) به صورت: $\{\dot{q}\} - T\{q\} = \vec{0}$ و با جایگزینی $\{q\} = \{\phi\}e^{\lambda t}$ و $\{\dot{q}\} = \lambda\{\phi\}e^{\lambda t}$ در آن معادله مشخصه (۲۱) به دست می آید:

$$[\lambda I - T]\{\phi\} = \vec{0} \Rightarrow |\lambda I - T| = 0 \quad (21)$$

مشاهده می شود که از رابطه (۲۱) مقادیر ویژه مستقیماً به دست می آید که مزیت مهم روش سرعت-تغییرمکان نسبت به روش شتاب-تغییرمکان محسوب می شود.

با قرار دادن هر یک از ریشه های T در رابطه (۲۱) می توان نصف تعداد مقادیر ویژه سیستم را به دست آورد. در معادله (۲۲) هر یک از این نصف تعداد مقادیر ویژه و نیز شکل مد اول مثال نشان داده شده است. اندیس VD بیانگر روش پیشنهادی شتاب-تغییرمکان است:

$$\lambda_{VD1} = \begin{pmatrix} -0.12072 + 46.13759i \\ -0.12072 - 46.13759i \\ -2.26667 + 29.92899i \\ -2.26667 - 29.92899i \\ -0.0231 + 20.28718i \\ -0.0231 - 20.28718i \end{pmatrix} \quad \phi_{VD1}(\lambda) = \begin{pmatrix} I \\ -0.35316 - 0.01337i \\ -0.08203 + 0.03368i \\ -0.5362 - 0.01681i \\ 0.19175 + 0.01566i \\ 0.04375 - 0.01793i \end{pmatrix} \quad (22)$$

آن بر حسب λ^2 می توان نصف تعداد مقادیر ویژه سیستم را به دست آورد. در معادله (۱۳) هر یک از این نصف تعداد مقادیر ویژه و نیز شکل مد اول مثال نشان داده شده- است. اندیس AD بیانگر روش پیشنهادی شتاب-تغییرمکان است.

$$\lambda_{AD1} = \begin{pmatrix} 0.12072 + 46.13759i \\ 0.12072 - 46.13759i \\ 2.26667 + 29.92899i \\ 2.26667 - 29.92899i \\ 0.0231 + 20.28718i \\ 0.0231 - 20.28718i \end{pmatrix} \quad \phi_{AD} = \begin{pmatrix} I \\ -0.35316 + 0.01337i \\ -0.08203 - 0.03368i \\ -0.5362 + 0.01681i \\ 0.19175 - 0.01566i \\ 0.04375 + 0.01793i \end{pmatrix} \quad (13)$$

مشاهده می شود که نتایج با روش بردار حالت مطابقت کامل دارند.

(Velocity-Displacement Approach)

در این روش فرض می شود که بردار سرعت سیستم $\{\dot{q}\}$ به صورت خطی تابعی از بردار تغییرمکان $\{q\}$ است:

$$\{\dot{q}\} = T\{q\} \Rightarrow \{\ddot{q}\} = T\{\dot{q}\} \quad (14)$$

در رابطه (۱۴)، T ماتریس انتقال سرعت-تغییرمکان است. با جایگزینی رابطه (۱۴) در معادله (۱) خواهیم داشت:

$$MT\{\dot{q}\} + C\{\dot{q}\} + K\{q\} = \vec{0} \Rightarrow (MT + C)\{\dot{q}\} + K\{q\} = \vec{0} \quad (15)$$

مشاهده می شود که در این روش نیز معادلات مرتبه دوم به دستگاه مرتبه اول تبدیل می شود. با بازنویسی رابطه (۱۴) به صورت: $\{q\} = T^{-1}\{\dot{q}\}$ و با جایگزینی آن در معادله (۱) خواهیم داشت:

$$M\{\dot{q}\} + C\{\dot{q}\} + KT^{-1}\{\dot{q}\} = \vec{0} \Rightarrow M\{\dot{q}\} + (C + KT^{-1})\{\dot{q}\} = \vec{0} \quad (16)$$

با مشتق گیری از رابطه (۱۵) و مقایسه آن با رابطه (۱۶) می توان نتیجه گیری کرد که جهت حصول به جوابهای غیرصفر برای $\{\dot{q}\}$ و $\{q\}$ رابطه (۱۷) باید برقرار باشد:

$$(M + CT^{-1})M^{-1} = K(CT + K)^{-1} \quad (17)$$

با انجام یک سری عملیات ماتریسی:

$$(I + CT^{-1}M^{-1})(CT + K) = K \Rightarrow$$

$$CT + CT^{-1}M^{-1}CT + K + CT^{-1}M^{-1}M^{-1}K - K \Rightarrow$$

$$T + T^{-1}M^{-1}CT + T^{-1}M^{-1}K = 0_{n \times n} \Rightarrow$$

$$T^2 + M^{-1}CT + M^{-1}K = 0_{n \times n} \Rightarrow$$

معادله (۱۸) به دست می آید:

$$MT^2 + CT + K = 0_{n \times n} \quad (18)$$

مشاهده می شود که نتایج با روش بردار حالت مطابقت کامل دارند.

با جایگزینی $\{q\} = \lambda\{\phi\}e^{\lambda t}$ و $\{\dot{q}\} = \lambda\{\phi\}e^{\lambda t}$ در معادلات (۲۸) و (۲۹)، معادلات مشخصه (۳۰) و (۳۱) به دست می آید:

$$e^{\lambda t}(\lambda I + T^{-1})\{\phi\} = \vec{0} \Rightarrow |\lambda I + T^{-1}| = 0 \quad (۳۰)$$

$$e^{\lambda t}(\lambda M + TK)\{\phi\} = \vec{0} \Rightarrow |\lambda M + TK| = 0 \quad (۳۱)$$

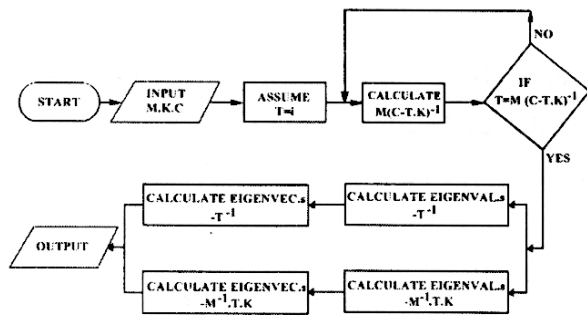
با حل معادلات (۳۰) و (۳۱)، دو مجموعه از مقادیر ویژه سیستم به دست می آیند. مزیت این روش نسبت به دو روش پیشین، علاوه بر سادگی روابط تکرار، این است که تنها با محاسبه یک ریشه T می توان تمام مقادیر ویژه سیستم را به دست آورد. در معادله (۳۲) هر یک از این نصف تعداد مقادیر ویژه و نیز شکل یکی از مدها نشان داده شده است.

$$\lambda_{E1} = \begin{pmatrix} -0.12072 + 46.13759i \\ -0.12072 - 46.13759i \\ -2.26667 + 29.92899i \\ -2.26667 - 29.92899i \\ -0.0231 + 20.28718i \\ -0.0231 - 20.28718i \end{pmatrix} \phi_{SV}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.00636 + 0.00146i \\ 0.00053 + 0.00006i \\ 2.2516 - 0.02391i \\ 0.014 + 0.00223i \\ 0.00119 + 0.00012i \end{pmatrix} \quad (۳۲)$$

$$\lambda_{E2} = \begin{pmatrix} -0.42758 + 13.18645i \\ -0.42758 - 13.18645i \\ -0.26322 + 8.03197i \\ -0.26322 - 8.03197i \\ -1.39709 + 18.23383i \\ -1.39709 - 18.23383i \end{pmatrix} \phi_{E2}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.00636 + 0.00146i \\ 0.00053 + 0.00006i \\ 2.2516 - 0.02391i \\ 0.014 + 0.00223i \\ 0.00119 + 0.00012i \end{pmatrix}$$

مشاهده می شود که باز نتایج با روش بردار حالت مطابقت کامل دارند.

با توجه به اینکه عملیات محاسباتی در روش بسط نسبت به دو روش اخیر و نیز روش بردار حالت کمتر است، روند محاسباتی این روش به کمک فلوجارت شکل (۲) ارائه می گردد:



شکل (۲): فلوجارت روش بسط

دقت نتایج حاصل از روشهای پیشنهادی در قسمتهای قبل نشان داده شد. در این قسمت مزایای محاسباتی این

(Expansion Approach)

در این روش معادلات مرتبه دوم حرکت به صورت رابطه (۲۳) بسط داده می شود:

$$M\{\dot{q}\} + C\{q\} + K\{q\} \equiv \left(a \frac{d}{dt} + b\right)(c\{\dot{q}\} + d\{q\}) = \vec{0} \quad (۲۳)$$

در رابطه (۲۳)، a, b, c, d ماتریس های وابسته به ماتریس های C, M و K می باشند. با بسط طرف راست معادله (۲۳) و با تساوی پارامترهای مساوی خواهیم داشت:

$$ac = M \Rightarrow c = a^{-1}M \quad (الف, ۲۴)$$

$$ad + bc = C \quad (ب, ۲۴)$$

$$bd = K \Rightarrow d = b^{-1}K \quad (پ, ۲۴)$$

با جایگزینی d و c در رابطه (۲۴) خواهیم داشت:

$$ad + ba = a(b^{-1}K) + b(a^{-1}M) = C \quad (۲۵)$$

$$\Rightarrow ab^{-1}K + ba^{-1}M = C$$

حال با تعریف $T \equiv ab^{-1}$ ، به عنوان مجهول در معادله (۲۵) خواهیم داشت:

$$TK + T^{-1}M = C \quad (۲۶)$$

معادله (۲۶) یک معادله ماتریسی درجه دوم بر حسب T است و دارای دو ریشه می باشد. یکی از این ریشه ها را می توان با رابطه تکرار (۲۷) به دست آورد:

$$T = M \begin{pmatrix} C - T & K \\ UNKNOWN & KNOWN \end{pmatrix}^{-1} \quad (۲۷)$$

با حل معادله (۲۷) در مورد مثال، یکی از ریشه های ماتریس T به دست آمده است (اندیس E بیانگر روش پیشنهادی بسط می باشد):

$$TE = \begin{pmatrix} -1.35392 & -4.77746 \times 10^{-3} & 2.81181 \times 10^{-4} & 0.7254 & 2.18638 \times 10^{-3} & -2.46652 \times 10^{-4} \\ -4.04415 & 0.10852 & 0.03107 & 1.71156 & 0.09422 & 0.02441 \\ 0.13306 & -0.48213 & -0.11311 & 1.66789 & -0.32954 & -0.09309 \\ -2.5441 & -8.45409 \times 10^{-3} & 6.42794 \times 10^{-4} & 1.3619 & 3.94733 \times 10^{-3} & -4.90729 \times 10^{-4} \\ -7.05244 & 0.10186 & 0.03055 & 3.01233 & 0.20134 & 0.0526 \\ -1.71811 & -0.46269 & -0.1105 & 3.8592 & -0.74894 & -0.19948 \end{pmatrix}$$

با فرض $a = I_{n \times n}$ آنگاه $b = T^{-1}$ و با جایگزینی آنها در معادله (۲۳) خواهیم داشت:

$$a\{\dot{q}\} + b\{q\} = \vec{0} \Rightarrow \{\dot{q}\} + T^{-1}\{q\} = \vec{0} \quad (۲۸)$$

$$c\{\dot{q}\} + d\{q\} = \vec{0} \Rightarrow M\{\dot{q}\} + TK\{q\} = \vec{0} \quad (۲۹)$$

روشها با روش بردار حالت بررسی شده است. به همین منظور تعداد عملیات ماتریسی هر یک از روشها محاسبه شده است. عملیات جبری ماتریسها در روشهای به کار رفته را می توان به چهار گروه طبقه بندی نمود:

- ۱- ضرب یک ماتریس و یا عدد ثابت در یک ماتریس دیگر شامل n^2 عمل ضرب می باشد؛
 - ۲- دترمینان گیری از یک ماتریس که به صورت تحلیلی شامل $n!$ عمل ضرب می باشد؛
 - ۳- معکوس کردن یک ماتریس که به صورت تحلیلی شامل $(n+1)!+n^2$ عمل ضرب می باشد؛
 - ۴- محاسبه مقادیر ویژه یک ماتریس، که با p بار تکرار شامل $p(n!+n^2)$ عمل ضرب می باشد.
- با این تعداد عمل ضرب عددی می توان حجم محاسبات روشها را مطابق جدول (۱) مقایسه نمود.

به عنوان مثال می توان حجم عملیات در مورد مثال حل شده در این مقاله را به ازای مقادیر مختلف تکرار در جدول (۲) مشاهده نمود (سازه مثال دارای ۶ درجه آزادی می باشد).

برای مقایسه تعداد عملیات ضرب عددی روشهای پیشنهادی با روش موجود، شکل (۳) ترسیم شده است. مشاهده می گردد که برای سازه های با بیش از سه درجه آزادی روش مستقیم دارای کمترین حجم عملیاتی است. برای ۱۰ درجه آزادی، نسبت تعداد عملیات از مرتبه 10^1 می باشد. به عبارت دیگر، روشهای پیشنهادی قادرند در تحلیل مقادیر ویژه صرفه جویی زمانی مطلوبی را بدون کاهش دقت در بر داشته باشند (در شکل ۳، تعداد تکرار ۱۰ در نظر گرفته شده است).

جدول (۱): مقایسه حجم محاسبات روشهای پیشنهادی

مجموع تعداد عملیات ضرب عددی	تعداد عملیات جبری ماتریسها				رتبه	روش
	مقادیر ویژه	معکوس کردن	دترمینان گیری	ضرب		
$P \cdot [(2n)! + 4n^2]$	1	-	-	-	$2n$	بردار حالت
$P \cdot (n! + 2n^2)$	-	-	p	$2p$	n	مستقیم
$P \cdot [4(n+1)! + 2n! + 14n^2] + (n+1)! + n^2$	2	$4p+1$	-	$8p$	n	شتاب- تغییر مکان
$P \cdot [2(n+1)! + 2n! + 8n^2] + (n+1)! + n^2$	2	$2p+1$	-	$4p$	n	سرعت- تغییر مکان
$P \cdot [(n+1)! + 2n! + 5n^2] + (n+1)! + 3n^2$	2	$p+1$	-	$2p+2$	n	بسط معادلات

جدول (۲): حجم عملیات ضرب در مثال حل شده

روش	تعداد تکرارها		
	$p=20$	$p=10$	$p=5$
بردار حالت	$9.58003E+9$	$4.79002E+9$	$2.39501E+9$
مستقیم	$1.584E+4$	$7.92E+3$	$3.96E+3$
شتاب- تغییر مکان	$4.47156E+5$	$2.26116E+5$	$1.15596E+5$
سرعت- تغییر مکان	$2.41236E+5$	$1.23156E+5$	$6.4116E+4$
بسط معادلات	$1.38348E+5$	$7.1748E+4$	$3.8448E+4$

پژوهشگاه بین المللی زلزله شناسی و مهندسی زلزله،
(در دست تهیه).

2. Gupta, A.K., "Response Spectrum Method" in Seismic Analysis and Design of Structures, Boca Ration, CRC press, 1990.

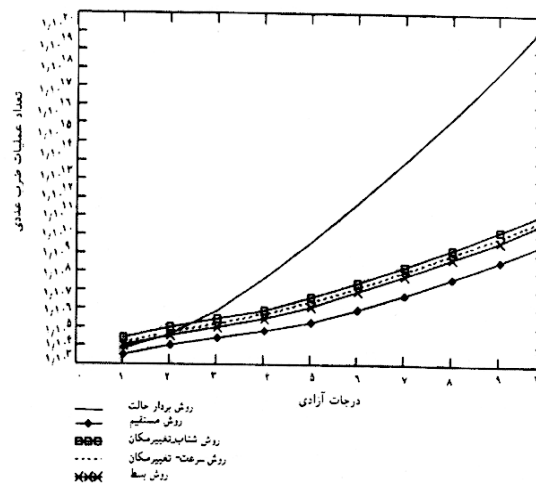
3. Foss, K.A., "Coordinates Which Uncouple the Equation of Motion of Damped Linear Dynamic Systems", Journal of Applied Mechanics, Vol. 25, September 1958, pp. 361-364.

4. Clough, R.W., and Mojtahedi, S., "Earthquake Response Analysis Considering Non-Proportional Damping, Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics", Vol. 4, 1976, pp. 489-496.

5. Singh, M.P., "Seismic Response by SRSS for Non-Proportional Damping, Journal of the Engineering Mechanics Division", ASCE, Vol. 106, No. EM6, December 1980, pp. 1405-1419.

6. Der Kuireghian, A., and Igusa, T., "Dynamic Analysis of Multiply Tuned and Arbitrarily Supported Secondary Systems", Report No. UCB/EERC-83/07, University of California, Berkeley, July 1983.

7. Gupta, A.K., and Jaw, J.W., "Seismic Response of Non-Classically Damped Systems", Nuclear Engineering and Design, Vol. 91, January 1986, pp. 153-159. ◀



شکل (۳): نمودار مقایسه حجم عملیات ضرب

با ارزیابی نتایج به دست آمده، اگرچه روش "مستقیم" کم عملیات ترین روش می باشد، اما، به دلیل پیچیدگی حل عددی و حدس مقادیر اولیه در آن، روش "بسط" (*Expansion*) به لحاظ برنامه پذیری بیشتر و سادگی روابط تکرار، برای تحلیل سیستم های دینامیکی با میرایی نامناسب (غیر کلاسیک) پیشنهاد می گردد.

۱- غفوری آشتیانی، محسن. "ارتعاشات پیشا"، تهران: