نگاهی دقیقتر به مفهوم ضریب مشارکت جرمی و تعاریف آن در تحلیل لرزه‌ای سازه‌ها

محمود حسینی، استادیار و عضو هیأت علمی پژوهشکدهٔ مهندسی سازه پژوهشگاه
فریبرز یعقوبی وایقان، کارشناس مرکز تحقیقات و آموزش وزارت راه و ترابری

۱- چکیده

در تحلیل دینامیکی سازه ها ضریب مشارکت جرمی در مراجع مختلف دارای تعاریف متفاوتی می‌باشد. از آنجا که هریک از این تعاریف علی‌رغم مشترک بودن مفهوم کلی آنها، حالتی خاص را دربر می گیرند در حالات دیگر شرط اساسی برابر با یک بودن مجموع ضرایب مشارکت جرمی را برآورده نمی نمایند؛ از این رو، برای پژوهشگرانی که با تحلیل لرزه‌ای سازه ها سروکار دارند ابهاماتی به وجود می آورند. این مقاله با ارائه چند مثال ساده ضمن بررسی و مقایسه این تعاریف و روابط مربوطه با یکدیگر، جامعترین معادله را ارائه می نماید.

۲- مقدمه

مفهوم عمومی ضریب مشارکت جرمی (*Mass Participation Factor*) در تحلیل لرزه‌ای سازه ها به روش مدی، درصدی از جرم سازه است که در هر مد ارتعاشی سازه دخالت دارد. این ضرایب در منابع مختلف با متغیرهایی همچون L_j [۱]، γ_j [۲] و [۳]، M_{ej} [٤] و [٥] و α_i [٦] و از این قبیل معرفی گردیده اند و تعاریف گوناگونی برای آنها ارائه شده- است. متأسفانه این اصطلاح با اصطلاح "ضریب شرکت مدی" به علت نزدیکی مفهوم تا حدودی مخلوط گردیده و استفاده کنندگان تازه کار از روابط تحلیل لرزه ای سازه های چند درجه آزاد را دچار ابهام می نماید. بعلاوه، مراجع گوناگون برای جمع ضرایب مذکور نیز مقادیر متفاوتی ارائه نموده اند و چنانچه استفاده کنندگان از این روابط دقت کافی به شرایط خاص هر یک از تعاریف نداشته باشند در تحلیل لرزه ای سازه ها از این لحاظ دچار ابهام می گردند.

در این مقاله سعی می‌شود که با ارائه چند مثال ساده و مقایسهٔ نتایج حاصل از تعاریف گوناگون و ارائه یک معادله جامع به رفع این ابهام کمک گردد. برای اینکه بتوان تعاریف گوناگون ارائه شده را با هم مقایسه نمود لازم است پاسخ مدی سازه های چند درجه آزاد به اختصار توضیح داده شود.

در یک سازه چند درجه آزاد رابطه تعادل در مد j ام که حل آن پاسخ مد j ام سازه یعنی $y_j(t)$ را به دست می‌دهد با فرض کلاسیک بودن میرایی به صورت رابطهٔ (۱) قابل بیان می‌باشد:

$$M_j\ddot{y}_j(t)+C_j\dot{y}_j(t)+K_j y_j(t)=\{\varphi_j\}^T[m][r]\{E(t)\} \qquad (۱)$$

در رابطهٔ (۱)، M_j ، C_j و K_j به ترتیب جرم، میرایی و سختی مدی، $\{\varphi_j\}$ بردار ارتعاشی مبنا در مد j ام، [m] ماتریس جرم سازه، [r] ماتریس کلی ضرایب تأثیر زلزله [۷] و $\{E(t)\}$ بردار شتاب زمین در طول وقوع زلزله است که با رابطهٔ (۲) بیان می گردد:

$$\{E(t)\}=\begin{Bmatrix}\ddot{x}_g(t)\\ \ddot{y}_g(t)\\ \ddot{z}_g(t)\\ \ddot{\theta}_{gx}(t)\\ \ddot{\theta}_{gy}(t)\\ \ddot{\theta}_{gz}(t)\end{Bmatrix} \qquad (۲)$$

اگر بردار تأثیر مدی در مد j ام طبق رابطهٔ (۳) تعریف شود:

$$\underset{1x6}{\langle L_j\rangle}=\underset{1x6}{\{\varphi_j\}^t}\underset{nxn}{[m]}\underset{nx6}{[r]} \qquad (۳)$$

هر یک از مؤلفه‌های ششگانه $\langle L_j\rangle$ یعنی L_{jk} را می‌توان ضریب تأثیر مؤلفه k ام حرکت زمین در مد j ام ارتعاش سازهٔ n درجه آزاد دانست. بر این اساس، جا به جایی مدی طبق رابطهٔ (٤) به دست می آید:

$$y_j(t)=\frac{\langle L_j\rangle}{M_j\omega_{Dj}}\int_o^t\{E(t)\}e^{-\xi_j\omega_j(t-\tau)}\sin\omega_{Dj}(t-\tau)\,dt \qquad (٤)$$

در اغلب مراجع تنها یک مؤلفهٔ افقی شتاب زمین، یعنی $\ddot{x}_g(t)$ در نظر- گرفته می‌شود و در نتیجه بردار $\langle L_j \rangle$ تنها یک مؤلفه دارد که با L_j نمایش داده می‌شود. در این صورت ماتریس [r] به بردار ستونی {r} تبدیل می‌گردد که برای ساختمانهای مدل تیر برشی تمام مؤلفه های آن ۱ می‌باشد و معمولاً آن را با {1} نشان می‌دهند.

۳- تعریف ضریب مشارکت جرمی در مراجع گوناگون

رابطه پیشنهادی مرجع [۱] برای ضرایب مشارکت جرمی، که نماد L_j را برای این منظور به کاربرده، به صورت رابطهٔ (۵) است:

$$L_j = \frac{\{\varphi_j\}^T [m] \{1\}}{\{\varphi_j\}^T [m] \{\varphi_j\}} \quad , \sum_{j=1}^{n} L_j = 1 \qquad (۵)$$

در مراجع [۲]، [۳] و [٤] شکل ساده شدهٔ رابطهٔ (۵) به صورت رابطهٔ (٦) و با استفاده از نماد γ_j یا نمادهای دیگر ارائه شده است. این مراجع در مورد مجموع γ_jها بوضوح مطلبی بیان ننموده اند:

$$\gamma_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \varphi_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} m_i \varphi_{ij}^2} \qquad (٦)$$

مرجع [۲]، نماد γ_j را برای مفهوم دیگری با عنوان "جرم مؤثر مدی" نیز به کار برده است که طبق رابطهٔ (۷) محاسبه می‌گردد:

$$\gamma_j = \frac{\frac{L_j^2}{Mj}}{M_T} \quad , \quad \sum_{j=1}^{n} \gamma_j = 1 \qquad (۷)$$

کمیّت M_T برابر است با:

$$M_T = \{1\}^T [m] \{1\} \qquad (۸)$$

مرجع [۵]، رابطهٔ (۹) را برای مفهوم اخیر ارائه نموده است:

$$M_{ej} = \frac{L_j^2}{M_j} \quad , \sum_{j=1}^{n} M_{ej} = \text{جرم کل سازه} \qquad (۹)$$

ضریب ارائه شده در مرجع [٦] به صورت رابطهٔ (۱۰) می‌باشد:

$$\alpha_j = \frac{\{\varphi_N\}^T [m] \{r\}}{\{\varphi_N\}^T [m] \{\varphi_N\}} \quad , \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1 \qquad (۱۰)$$

در رابطهٔ (۱۰)، $\{\varphi_N\}$، نرمال شدهٔ اشکال‌مدی نسبت‌به‌جرم می‌باشد. ملاحظه می‌گردد که علی رغم نزدیکی مفهومی روابط مذکور، شکل ظاهری آنها با هم متفاوت می‌باشد. البته باید توجه داشت که آنچه به عنوان "جرم مؤثر مدی" تعریف شده با ضریب شرکت مدی یکسان نیست و تمایز بین این دو مفهوم ضروری است.

در این مورد مرجع [۸] نسبت به سایر مراجع با دقت بیشتری موضوع را مورد توجه قرار داده و مفهوم "ضرایب شرکت مدی" ارائه شده در روابط (۵)، (٦) و (۱۰) را اساساً تعریف مناسبی نمی‌داند و به جای آن از ضرایب دیگری تحت عنوان "ضرایب دخالت مدی" *(Mode Contribution Factors)* استفاده می‌نماید. تعریف این ضرایب برای انواع پاسخهای لرزه ای گوناگون از قبیل تغییرمکان، برش، لنگر و غیره متفاوت و نسبتاً پیچیده می‌باشد و علاقه مندان می‌توانند جهت آشنایی بیشتر با آنها به مرجع مذکور مراجعه نمایند.

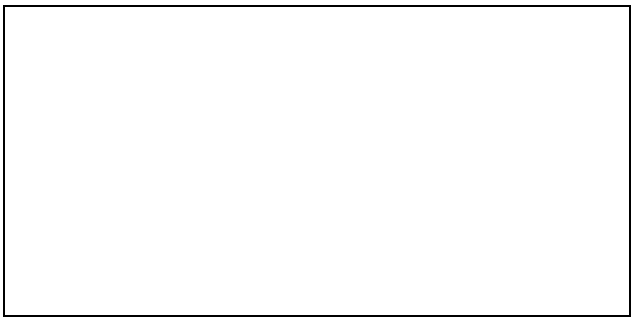
آنچه در این مقاله به آن پرداخته می‌شود یکی مشکل برابر واحد نبودن مجموع ضرایب شرکت مدی به اشکال ارائه شده در روابط (۵)، (٦) و (۱۰) می‌باشد و دیگری عدم کلیّت روابط (۷) و (۹) برای حالاتی که علاوه بر جرمهای انتقالی، جرمهای دورانی نیز در ارتعاش سازه مطرح باشد. در ادامه با ارائه چندمثال عددی سعی می‌شود که ابتدا مشکلات مذکور به صورت بارز نشان داده شوند و سپس رابطه کلی و جامع ارائه می‌گردد.

٤- مقایسه های عددی و ارائه فرمول مناسب

در این بخش با ارائه چند مثال ساده به مقایسه روابط و فرمولهای ارائه شده برای جمع ضرایب مشارکت جرمی در مراجع مختلف پرداخته- می‌شود تا بتوان به جامعترین رابطه دست یافت.

٤-۱- مثال اول

سازه نشان داده شده در شکل (۱) تحت تأثیر حرکت دورانی زمین



m=5000 kg h=3m l=2m EI=2x10^{6}N.m^2

شکل (۱): سازه آونگی وارونه تحت اثر حرکت دورانی زمین

قرار گرفته است. برای این سازه ماتریس های سختی و جرم و بردار ضرایب تأثیر زلزله به ترتیب عبارتند از:

$$[k]=\begin{bmatrix}\frac{12EI}{h^3} & \frac{-6EI}{h^2}\\ \frac{-6EI}{h^2} & \frac{4EI}{h}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}888889\ N/m & -1333333\ N.m/m\\ -1333333\ N.m/m & 2666667\ N.m^2/m\end{bmatrix}$$

$$[m]=\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & \frac{ml^2}{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5000\ kg & 0\\ 0 & 1667\ kg.m^2\end{bmatrix}\qquad ,\{r\}=\begin{Bmatrix}3\\1\end{Bmatrix}$$

معادلهٔ مشخصه این سازه عبارت است از:

$$\left|[k]-\omega_j^2[m]\right|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}889-5\lambda & -1333\\ -1333 & 2667-1.67\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$8.35\lambda^2-14820\lambda+594074=0$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\begin{cases}\lambda_1=41.03\\ \lambda_2=1733.82\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega_1=6.4\ rad/s\\ \omega_2=41.6\ rad/s\end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix}\varphi_{11}\\ \varphi_{21}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ 0.513\end{Bmatrix},\begin{Bmatrix}\varphi_{12}\\ \varphi_{22}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ -5.835\end{Bmatrix}\Rightarrow[\Phi]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0.513 & -5.835\end{bmatrix}$$

برای محاسبهٔ مقادیر سختیها و جرمهای مدی می‌توان نوشت:

$$[\varphi]^T[k][\varphi]=\begin{bmatrix}205.171 & 35.171\\ 8667.005 & -16894.945\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0.513 & -5.835\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}223.214 & -0.052\\ -0.052 & 107249.06\end{bmatrix}N.m^2$$

$$[\varphi]^T[m][\varphi]=\begin{bmatrix}5.000 & 0.857\\ 5.000 & -9.744\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0.513 & -5.835\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}5.440 & -0.0006\\ 0.0013 & 61.856\end{bmatrix}kg.m^2$$

بر این اساس، مقادیر فرکانس های طبیعی سازه عبارتند از:

$$\omega_1=\sqrt{\frac{223.214}{5.44}}=6.406\ rad/s,\omega_2=\sqrt{\frac{107249.06}{61.856}}=41.64\ rad/s$$

این مقادیر با مقادیر به دست آمده از حل معادلهٔ مشخصه همخوانی کافی دارند و نشان دهندهٔ صحت محاسبات تا این مرحله می‌باشند.

ضرایب تأثیر مدی برای سازهٔ موردنظر عبارتند از:

$$L_1=\{\varphi_1\}^T[m]\{r\}=<5\quad 0.857>\begin{Bmatrix}3\\1\end{Bmatrix}=15.857\ kg.m^2$$

$$L_2=<5\quad -9.744>\begin{Bmatrix}3\\1\end{Bmatrix}=5.256\ kg.m^2$$

در نتیجه ضرایب شرکت جرمی چنین به دست می آیند:

$$\gamma_1=\frac{L_1}{M_1}=\frac{15.857}{5.44}=2.91,\ \gamma_2=\frac{L_2}{M_2}=\frac{5.256}{61.856}=0.085$$

مجموع این ضرایب عبارتست از:

$$\sum_{j=1}^{2}\gamma_j=\gamma_1+\gamma_2=2.91+0.085\approx 3\neq 1$$

ملاحظه می‌گردد که مجموع ضرایب تأثیر مدی که اساس آنها روابط (۵) و (٦) یا (۱۰) می‌باشدبرابر با یک نیست. علاوه بر آن، بیش از یک بودن مقدار γ_j به تنهایی خود اساساً با مفهوم ضریب شرکت مدی تناقض دارد؛ چراکه بیش از یک بودن مقدار ضریب شرکت یعنی اینکه مد مربوطه بیش از صددرصد در پاسخ سازه سهم داشته باشد. شاید به نظر رسد که علت تناقض این است که در این مثال تحریک زلزله از نوع دورانی است حال آنکه در فرمولهای مربوطه مؤلفهٔ حرکت افقی موردنظر بوده است، ولی با مثالهای بعدی نشان داده خواهد شد که حتی برای حالت تحریک جا به جایی افقی نیز این تناقض می‌تواند وجود داشته باشد.

چنانچه در نظر باشد که از رابطهٔ (۹) برای این سازه استفاده شود ملاحظه می‌گردد که محاسبه مقدار $\sum_{j=1}^{n}M_{ej}$ به عنوان جرم کل سازه اساساً به علت هم واحد نبودن مقادیر M_{11} و M_{22} که به ترتیب دارای واحدهای kg و $kg.m^2$ می باشند منطقاً امکان پذیر نمی‌باشد و واضح است که محاسبه M_{ej} ، بر این اساس به نتیجهٔ درستی منجر نخواهد شد. به علت این ناهمخوانی در واحدهای درایه های ماتریس جرم که در مورد ساختمانهای پیچشی، باید جرم دورانی‌سقفها حول محورقائم در نظر گرفته شود، مصداق دارد و مطالعهٔ اثر مؤلفه های پیچشی حرکت زمین برای آنها مهم می‌باشد [۷]، روابطی همچون رابطهٔ (۹) نمی‌تواند به کار رود.

برای رفع تناقض مطرح شده، توجه به رابطهٔ (۸) که در آن به شکلی خاص اثر ضرایب تأثیر زلزله و جرم سازه با هم ترکیب شده اند مفید می‌باشد. درواقع در این رابطه برای کمیت M_T واحد $kg.m^2$ حاصل می‌شود که با واحد مقادیر $\frac{L_j^2}{M_j}$ یکسان است چراکه L_j ها دارای واحد $kg.m^2$ و M_j ها نیز با فرض اینکه φ_{ij}ها دارای واحد طول باشند مجدداً دارای واحد $kg.m^2$ خواهند بود. نکته جالب توجه این است که در مواردی که برخی از مؤلفه های $\{\varphi_j\}$ها از نوع دورانی باشند جرم متناظر آنها از نوع جرم دورانی است که باعث می‌شود واحد تمام جملات تشکیل دهندهٔ $\{\varphi_j\}^T[M]\{\varphi_j\}$یا همان L_j دارای واحد یکسان $kg.m^2$ باشند. واضح است که در رابطه (٦) و روابط مشابه آن صورت و مخرج کسر دارای واحدهای یکسان نیستند و این یک تناقض ذاتی در این روابط می‌باشد. حال آنکه در رابطهٔ (۸) به علت وجود مؤلفه های تغییرمکانی در بردارهای $\{1\}$ واحد کمیت M_T همواره $kg.m^2$ می‌باشد و حتی در مواقع وجود درایه های دورانی در ماتریس جرم سازه چون مؤلفه های r_{ij} متناظر آنها از جنس دوران (بدون بُعد) می‌باشند اشکالی در جملات تشکیل دهندهٔ M_T

به‌وجود نمی‌آید. بدین ترتیب می‌توان مفهوم M_T ارائه شده در مرجع [۲] را که به‌صورت رابطهٔ (۸) بیان گردیده، به‌صورت رابطهٔ (۱۱) تعمیم داد:

$$M_T = \{r\}^T [m] \{r\} \qquad (۱۱)$$

در این صورت برای سازهٔ مثال ۱ می‌توان نوشت:

$$M_T = \{r\}^T [m] \{r\} = \langle 3 \quad 1 \rangle \begin{bmatrix} 5000 & 0 \\ 0 & 1667 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} = 46667.000 \ kg.m^2$$

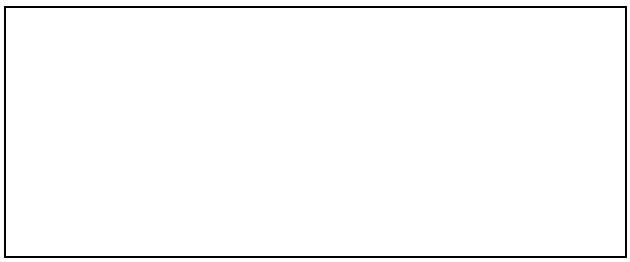
بر اساس رابطهٔ (۷) نیز می‌توان چنین نوشت:

$$\sum_{j=1}^{2} \gamma_j = \frac{\sum_{j=1}^{2} L_j^2 / M_j}{M_T} = \frac{46221.406 + 446.610}{46667.000} = 1.000$$

ملاحظه می‌گردد که با این تعریف M_T ، تناقض مرتفع می‌شود.

٤-۲- مثال دوم

سازه نشان داده شده در شکل (۲) تحت تأثیر حرکت دورانی زمین واقع شده است:



m=5000 kg h=4m l=5m EI=2x10^{6}N.m^2

شکل (۲): سازه آونگی وارونه غیر متقارن تحت اثر حرکت دورانی زمین

مشابه با مثال (۱) در مورد این سازه می‌توان نوشت:

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{16EI}{l^2 h} & \frac{12EI}{lh^2} \\ \frac{12EI}{lh^2} & \frac{12EI}{h^3} \end{bmatrix} = 10^3 \times \begin{bmatrix} 320 & 300 \\ 300 & 375 \end{bmatrix} N/m$$

$$[m] = \begin{bmatrix} 4m/3 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 6.67 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} kg$$

$$\Rightarrow [\varphi]^T [m] = \begin{bmatrix} 6.67 & -4.58 \\ 6.67 & 7.35 \end{bmatrix}, \quad \{r\} = \begin{Bmatrix} -2.5 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

$$[\varphi]^T [m] [\varphi] = \begin{bmatrix} 10.85 & -0.063 \\ -0.063 & 17.427 \end{bmatrix} \times 10^3 \ kg.m^2$$

$$L_1 = \langle 6.67 \quad -4.58 \rangle \begin{Bmatrix} -2.5 \\ 4 \end{Bmatrix} = -34.995 \times 10^3 \ kg.m^2 \Rightarrow$$

$$\gamma_1 = \frac{L_1}{M_1} = \frac{-34.995 \times 10^3}{10.85 \times 10^3} = -3.225$$

$$L_2 = \langle 6.67 \quad 7.35 \rangle \begin{Bmatrix} -2.5 \\ 4 \end{Bmatrix} = 12.725 \times 10^3 \ kg.m^2 \Rightarrow$$

$$\gamma_2 = \frac{L_2}{M_2} = \frac{-12725 \times 10^3}{17.475 \times 10^3} = 0.728$$

$$\sum_{j=1}^{2} \gamma_j = \gamma_1 + \gamma_2 = -3.225 + 0.728 \approx 2.5 \neq 1$$

حال آنکه بر اساس رابطه (۱۱) می‌توان نوشت:

$$M_T = \{r\}^T [m] \{r\} = \{-2.5 \quad 4\} \begin{bmatrix} 6.67 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \times 10^3 \begin{Bmatrix} -2.5 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

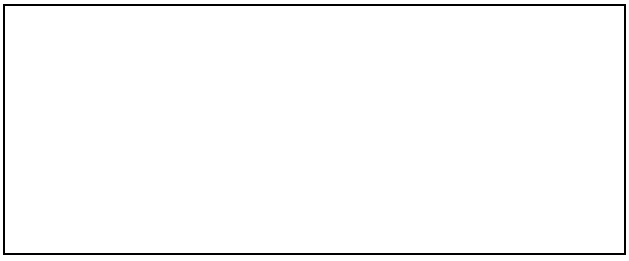
$$= 121687.500 \ kg.m^2$$

و نهایتاً:

$$\sum_{j=1}^{2} \gamma_j = \frac{\sum_{j=1}^{2} L_j^2 / M_j}{M_T} = \frac{112870.97 + 9266.130}{121687.5} = 1.000$$

٤-۳- مثال سوم

سازه نشان داده شده در شکل (۳) تحت تأثیر حرکت افقی زمین قرار گرفته است:



h_1=3m h_2=6m m=427188-336kg

$$E = 2.1 \times 10^6 \ kgf/cm^2 \quad I_c = 1728 cm^4$$

شکل (۳): قاب مسطح دو طبقه تحت اثر حرکت افقی زمین

سختی طبقات عبارت است از:

$$K = \frac{2 \times 12 \times 2.1 \times 10^6 \times 1728}{300^3} \times 981 = 3164313.6 \ N/m$$

با روندی مشابه، نتیجه محاسبات چنین است:

$$[k] = \begin{bmatrix} 6328627.2 & -3164313.6 \\ -3164313.6 & 3164313.6 \end{bmatrix} N/m$$

$$[m] = \begin{bmatrix} 427182.336 & 0 \\ 0 & 427182.336 \end{bmatrix} kg$$

$$[k] - \lambda [m] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2.82937 \\ \lambda_2 = 19.39284 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 1.68208 \ rad \\ \omega_2 = 4.40373 \ rad \end{cases}$$

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.618 & -1.236 \end{bmatrix}, \qquad \{r\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow [\varphi]^T[m][\varphi]=\begin{bmatrix}1 & 1.618\\ 2 & -1.236\end{bmatrix}[m]\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1.618 & -1.236\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}427182.336 & 691181.020\\ 854364.672 & -527997.367\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1.618 & -1.236\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}1545513.226 & 64.932\\ 64.932 & 2361334.090\end{bmatrix}kg.m^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}L_1 =< 427182.336 \quad 691181.020 >\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}=1118363.356 \ kg\\ L_2 =< 854364.672 \quad -527997.367 >\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}=326367.305 \ kg\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\gamma_1=\dfrac{L_1}{M_1}=\dfrac{1118363.356}{1545513.226}=0.724\\ \gamma_2=\dfrac{L_2}{M_2}=\dfrac{326367.305}{2361334.090}=0.138\end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{2}\gamma_j=\gamma_1+\gamma_2=0.724+0.138=0.862\neq 1$$

حال بر اساس رابطهٔ (۱۱) می‌توان نوشت:

$$M_T=\{r\}^T[m]\{r\}=\{1 \quad 1\}[m]\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}=427182.336+427182.336$$
$$=854364.672\ kg$$

در نهایت:

$$\sum_{j=1}^{2}\gamma_j=\frac{\sum_{j=1}^{2}L_j^2/M_j}{M_T}=\frac{809269.405+45108.237}{854364.672}=1.000$$

اگر ماتریس $[\varphi]$ برای این سازه به جرم نرمال شود، ماتریس $[\varphi_N]$ به‌دست خواهد آمد:

$$[\varphi_N]=\begin{bmatrix}0.0008 & 0.0013\\ 0.0013 & -0.008\end{bmatrix}$$

به طوری که:

$$[\varphi_N]^T[M][\varphi_N]=[I]$$

اگر رابطهٔ (۱۰) مورد استفاده قرار گیرد می‌توان نوشت:

$$[\varphi_N]^T[m]\{r\}=\begin{Bmatrix}897.083\\213.591\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}L_1\\L_2\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{L_1}{M_1}=\dfrac{897.083}{1}=897.083\\ \alpha_2=\dfrac{L_2}{M_2}=\dfrac{213.591}{1}=213.591\end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{2}\alpha_j=897.083+213.591=1110.674\neq 1$$

حال اگر به جای آنکه $\varphi_{11}=\varphi_{12}=1$ باشند و مقادیر دیگری مانند $\varphi'_{11}=\alpha,\varphi'_{12}=\beta$ برای آنها در نظر گرفته شود می‌توان نوشت:

(۱۲)

$$[\varphi']=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha\varphi_{21} & \beta\varphi_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ \varphi_{21} & \varphi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}=[\varphi]\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}[\varphi']^T[m]\{r\}=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}^T[\varphi]^T[m]\{r\}=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}[\varphi]^T[m]\{r\} & (۱۳)\\ [\varphi']^T[m][\varphi']=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}[\varphi]^T[m][\varphi]\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix} & (۱۴)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\{\gamma'\}=\frac{[\varphi']^T[m]\{r\}}{[\varphi']^T[m][\varphi']^T}=\frac{\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}[\varphi]^T[m]\{r\}}{\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}[\varphi]^T[m][\varphi]\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}} \qquad (۱۵)$$

اگر صورت و مخرج کسر در ماتریس $\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}^{-1}$ ضرب شود، رابطه (۱۶) به دست خواهد آمد:

$$\{\gamma'\}=\frac{[\varphi']^T[m]\{r\}}{[\varphi]^T[m][\varphi]\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}}\Rightarrow\gamma'_1=\frac{1}{\alpha}\gamma_1\ ,\gamma'_2=\frac{1}{\beta}\gamma_2 \qquad (۱۶)$$

ملاحظه می گردد که اگر و تنها اگر $\alpha=\beta=1$ و تمامی درایه های بردار $\{r\}$ برابر یک باشند، یعنی حالت ساختمانهای برشی تحت شتاب افقی زمین، آنگاه مقدار $\sum_{j=1}^{n}\gamma_j$ ارائه‌شده در مراجع مذکور برابر با یک خواهد شد؛ به همین دلیل، این فرمولها جنبه کلی ندارند.

نکتهٔ مهمی که باید به آن توجه داشت این است که کمیّت M_T تعریف شده توسط رابطهٔ (۱۱)، تنها برای حالتی که یک مؤلفه حرکت زمین در نظر گرفته می‌شود معتبر می‌باشد. در واقع بهتر است که با در نظر گرفتن ماتریس {r} به صورت بردارهای ستونی $\{\gamma_k\}$ یعنی $[\{r_1\}\{r_2\}...\{r_k\}...\{r_6\}]$ که هر یک مربوط به یکی از مؤلفه های شش گانهٔ حرکت زمین می‌باشند جرم کلی مؤثر در برابر آن مؤلفه به صورت رابطهٔ (۱۷) تعریف شود:

$$M_{ek}=\{r_k\}^T[m]\{r_k\} \qquad (۱۷)$$

بر این‌اساس، ضرایب مشارکت جرمی نیز به صورت رابطهٔ (۱۸) محاسبه می‌گردد:

$$\gamma_{jk}=\frac{L_{jk}^2/M_j}{M_{ek}} \qquad (۱۸)$$

در این رابطه، L_{jk} ضریب تأثیر مؤلفه k ام حرکت زمین در مد j ام ارتعاش سازه و γ_{jk} ضریب مشارکت جرمی مد j ام سازه در برابر

تحریک ناشی از مؤلفه k ام حرکت زمین می‌باشد.

۵- نتیجه گیری

با مقایسه نتایج عددی به دست آمده از روابط تعریف شده در مراجع مذکور می‌توان نتیجه گرفت:

- عبارت "ضرایب شرکت مدی" با تعاریف ارائه شده در مراجع مذکور بجز مرجع [۸] عبارت جامع و صحیحی نیست؛
- برای کنترل صحت محاسبات می‌توان ابتدا از رابطهٔ (۱۱) یا (۱۷) جرم کلی سازه را، که البته مفهوم آن جامعتر از مجموع جرمهای سازه می‌باشد، به دست آورد و سپس با استفاده از رابطهٔ (۷) یا (۱۸) "ضرایب شرکت جرمی" را محاسبه و مجموع آنها را کنترل نمود؛
- در مواردی که پاسخ غیرخطی سازه ها در برابر تحریکات چند مؤلفه ای زلزله با استفاده از روش مدی به صورت گام به گام زمانی محاسبه می‌گردد، چون مقادیر M_j ها می‌توانند در هر گام نسبت به گام قبل تغییر کند استفاده از روابط (۱۷) و (۱۸) در هر گام برای کنترل صحت محاسبات پاسخ بسیار سودمند خواهد بود.

۶- مراجع

۱- عادلی، حجت الله. "مهندسی زلزله"، تهران: دهخدا، چاپ ششم، ۱۳۷۵.

2-Clough, R.W., Penzien, J., “Dynamics of Structures”, 2nd Edition, Mc GrawHill, 1993.

3-Gaylord, E. H. and Gaylord, C. N., Structural Engineering Handbook, 3rd Ed., Mc Graw Hill, 1990.

4-Paz, M., International Handbook of Earthquake Engineering, Chapman and Hall, 1994.

۵- نعیم، فرزاد. "طرح سازه ها در برابر زلزله"، جلد اول، ترجمه رضا اوشک سرایی، انتشارات دانشگاه گیلان، ۱۳۷٤.

6-Amini, Ali., “Investigation of Response to Earthquake Excitation: A Statistical Basis for Spectrum Superposition”, USC Report No. CE 83-02, Los Angeles, California, 1983.

۷- حسینی، محمود؛ یعقوبی وایقان، فریبرز. "مطالعه ای بر ضرایب تأثیر زلزله در سازه های ساختمانی"، پژوهشنامه پژوهشگاه بین‌المللی زلزله شناسی و مهندسی زلزله، شمارهٔ ٤، زمستان ۱۳۷۷.

8-Chopra, A. K., Dynamics of Structures, Printice Hall, 1995.◄