یک روش معکوس برای تعیین خواص دینامیکی قابهای برشی دوبعدی وسه‌بعدی

کاظم چوپانی، فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی عمران - زلزله / ناصر خاجی، استادیار بخش مهندسی عمران،
دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

۱ـ چکیده

عکس‌العمل سازه‌ها درمقابل بارگذاری دینامیکی به خواص دینامیکی آنها بستگی دارد. در این تحقیق، برای برآورد خواص مزبور (که در عمل امکان اندازه‌گیری مستقیم آنها وجود ندارد) از روشی معکوس استفاده شده‌است. این روش که خواص دینامیکی را از طریق کمیتهای دیگر (که در عمل قابل اندازه‌گیری هستند) محاسبه می‌کند، برمبنای معکوس کردن مدل ریاضیِ بیانگرِ رفتارِ فیزیکی سیستم استوار است. همانند سایر مسائل معکوس رایج، تکین شدن ماتریس مشخصه، مشکل اساسی است. روش تفکیک مقادیر تکین برای تشخیص بدخیمی مدل ریاضی معکوس به‌کار می‌رود. برای بیان توانمندیهای این متدولوژی، قابهای برشی دو و سه‌بعدی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. برای آنکه مقادیر مورد نظر برای پاسخ سازه به واقعیت نزدیک باشد، با استفاده از مفاهیم اصلی تئوری دینامیک سازه‌ها، پاسخ سیستم حاصل شده و برای محاسبهٔ خواص دینامیکی سیستم، مورد استفاده قرار گرفته است. نتایج حاصل از این متدولوژی، مبیّن توانایی آن برای محاسبهٔ قابل‌قبول خواص دینامیکی قابهای مزبور است.

کلیدواژه‌ها: شناسایی سیستم‌ها، مسائل معکوس، روش تفکیک مقادیر تکین

۲ـ مقدمه

خواص دینامیکی سازه‌ها همچون پریود طبیعی ارتعاش، شکل مدهای ارتعاشی و میزان میرایی، از جملهٔ مهمترین عوامل تعیین کنندهٔ عکس‌العمل سازه‌ها در مقابل زمین‌لرزه می‌باشند. مدل‌های ریاضی که برای تعیین پارامترهای مذکور مورد استفاده قرار می‌گیرند، اغلب دارای فرضیات ساده‌کننده بوده‌ و اثرهای اجزای غیرسازه‌ای را درنظر نمی‌گیرند. به‌بیان دیگر، خصوصیات دینامیکی سازه‌ها به بسیاری از جزئیات رفتار مصالح و ترکیب کلی سازه بستگی دارد که تمام این جزئیات را نمی‌توان در مدل‌های ریاضی دخالت داد؛ بنابراین همواره بین مدل‌های تحلیلی و سازهٔ واقعی اختلافاتی وجود دارد و تنها با تعیین مستقیم این خصوصیات دینامیکی به وسیلهٔ آزمایش بر روی ساختمان واقعی و مقایسه با نتایج تحلیلی است که می‌توان به میزان دقت نتایج تحلیلی پی‌برد و در مورد قابل‌قبول بودن آنها قضاوت نمود [به‌عنوان مثال، مرجع ۱]. علاوه‌برآن، میزان میرایی در سازه‌ها به نوع مصالح مصرفی و روشهای ساخت بستگی دارد و فقط به وسیلهٔ آزمایش قابل اندازه‌گیری می‌باشد؛ بنابراین آزمایشهای لرزه‌ای بر روی سازه‌ها از مطمئن‌ترین روشها برای تعیین خواص دینامیکی آنهاست. اگرچه این آزمایشها در سالهای اخیر در کشورهای پیشرفته به‌عنوان روشی قابل قبول

برای شناخت خواص سازه‌ها، بسیار مورداستفادهٔ قرار گرفته است، در ایران تاکنون فقط سابقهٔ چند نمونهٔ محدود از آنها در دسترس می‌باشد [۱]. مرور نسبتاً کاملی از آزمایشهای انجام شده در ایران در مرجع [۲] آمده‌است.

برای برآوردبرخی کمیتهای فیزیکی که امکان اندازه‌گیری مستقیم آنها وجود ندارد، با بکارگیری روشی غیرمستقیم یا معکوس (Inverse) و از طریق کمیتهای دیگر قابل اندازه‌گیری، مقدار این کمیتهای فیزیکی محاسبه می‌شود. درواقع، روش معکوس، بر پایهٔ معکوس کردن مدل ریاضیِ بیان‌کنندهٔ رفتار فیزیکی آن سیستم استوار است. معمولاً این روش، حساسیت زیادی نسبت به داده‌ها و عدم قطعیت‌های مدلسازی دارد و با کمک روشهای عددی قدرتمند، قابل اعتماد است. مسائل معکوس زیادی با اهمیت عملی و اجرایی زیاد در مهندسی به چشم می‌خورد و فعالیتهای تحقیقاتی در این زمینه، رشد قابل‌توجهی داشته‌است [۳].

در این تحقیق سعی بر آن بوده‌است که با استفاده از یک روش ریاضی توانمند و با داشتن پاسخ سیستم، مشخصات دینامیکی سیستم، از جمله ماتریس‌های سختی ($\mathbf{K}$)، میرایی ($\mathbf{C}$) و جرم ($\mathbf{M}$) تعیین شوند. روش ریاضی مورد استفاده در این تحقیق، روشی به نام تفکیک مقادیر تکین (Singular Value Decomposition) است. این روش در حل دستگاههای خطی و تئوری ماتریس‌ها کاربرد وسیعی دارد و در دههٔ هشتاد میلادی توسط ریاضیدانان مطرح گردیده و از نظر ریاضی اثبات شده‌که روشی همگرا، پایدار و سازگار است.

۳- تعریف مسألهٔ معکوس

تحلیل معکوس معمولاً به روشی اطلاق می‌شود که می‌تواند پارامترهای کنترل‌کنندهٔ یک سیستم را از تحلیل رفتار خروجی آن سیستم تعیین کند. در مسائل شناسایی سیستم‌ها، می‌توان مسألهٔ معکوس را به‌صورت پارامتری تشریح کرد. معادلهٔ اپراتوری (۱) را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{R} \qquad (۱)$$

در رابطهٔ (۱)، ماتریس $\mathbf{A}$ مبیّن مشخصات سیستم، بردار $\mathbf{X}$ پارامترهای عمل‌کننده‌روی سیستم و بردار $\mathbf{R}$ پاسخ سیستم است. اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{X}$ معلوم و $\mathbf{R}$ نامعلوم باشند، این معادله یک معادلهٔ مستقیم خواهدبود. اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{R}$ معلوم و $\mathbf{X}$ نامعلوم باشند، مسألهٔ معکوس نوع اول به‌دست خواهدآمد. اگر $\mathbf{X}$ و $\mathbf{R}$ معلوم و $\mathbf{A}$ نامعلوم باشند، مسألهٔ معکوس نوع دوم حاصل خواهد شد. حل مسألهٔ معکوس از نوع دوم بسیار مشکلتر از نوع اول است؛ بویژه اگر کمیتهای اندازه‌گیری شده، خطای نسبتاً قابل ملاحظه‌ای داشته‌باشند. در مسألهٔ معکوس نوع دوم معمولاً خواص ماده یا خواص سازه نامعلوم می‌باشند [۳]. یکی از مشکلات اصلی در حل مسائل معکوس، بدحالتی (Ill-Conditioned/Ill-Posed) ماتریس مشخصهٔ آنهاست. روشهای ریاضی متنوعی برای تشخیص و ترمیم این بدحالتی پیشنهاد شده‌است [۴، ۵ و ۶] که در بین آنها روش تفکیک مقادیر تکین به‌عنوان یکی از توانمندترین و کارآمدترین روشها [۷] مورد بررسی قرار گرفته‌است.

۴- روش تفکیک مقادیر تکین

روش تفکیک مقادیر تکین (روش تمت) با تجزیهٔ یک ماتریس به دو ماتریس متعامد و یک ماتریس قطری، برای تشخیص بدحالتی مورد استفاده قرار می‌گیرد. استفاده‌از روش تمت در تعیین بدحالتی یک مسأله، از روشهای دیگر معمولتر است [۷]. با توجه به اینکه در روش تمت، ماتریس مورد نظر به دو ماتریس متعامد و یک ماتریس قطری تبدیل می‌شود، تشخیص ناقص بودن مرتبهٔ (Rank) ماتریس به‌راحتی

امکانپذیر است؛ چراکه ماتریس قطری فقط در قطر خود درایه دارد و به‌راحتی مشاهده می‌شود که در کدام درایهٔ قطر، مقدار درایه برابر صفر است. اگر بعضی از مقادیر درایه‌های قطری این ماتریس صفر باشند، ماتریس اصلی از مرتبهٔ کامل نیست.

روش تمت در تعیین بهترین محلهای اندازه‌گیری در آزمایشهای دینامیکی نیز به‌کاررفته‌است. این روش در تعیین اثرهای تکین‌بودن ماتریس مشخصهٔ سیستم، در مسائل بهینه‌سازی نیز کاربرد دارد.

ساتاکه و یوکوتا [۸] خواص ارتعاشی ساختمانهای بلندمرتبهٔ فولادی را از داده‌های آزمایشهای ارتعاشی و نگاشتهای لرزه‌ای استخراج کرده‌اند. هدف اصلی آنها، تعیین پریودهای طبیعی ارتعاشی و ضرایب میرایی وابسته به پریود بوده است.

سوگاوارا و همکارانش [۹] مجموعه‌ای از آزمایشهای ارتعاش اجباری را بر روی سازه‌هایی با مقیاس بزرگ، برای تعیین خواص دینامیکی سازه‌ها انجام داده‌اند. ایشان اثرهای اندرکنش خاک ـ سازه را نیز لحاظ کرده‌اند.

ییه و همکاران [۱۰] با استفاده از روش اجزای مرزی، روشی برای محاسبهٔ مدها و فرکانس‌های طبیعی یک تیر خمشی ارائه داده‌اند.

ناصر زارع و همکاران [۱۱] برای محاسبهٔ مدها و فرکانس‌های طبیعی یک سد قوسی با استفاده از روش اجزای مرزی برای مدل کردن اثرهای هیدرودینامیکی مخزن، روشی ارائه کرده‌اند.

ضیائی‌راد [۱۲] بر روی الگوریتم‌های مختلف موجود در به‌روزکردن مدل‌های عددی در دینامیک سازه‌ها کار کرده و چندین روش برای به‌روزکردن مدل‌های عددی در دینامیک سازه‌ها ارائه داده است.

فریسول و همکارانش [۱۳] سیستم‌های چنددرجه آزادی را در نظر گرفته و با فرض بدون خطا بودن ماتریس جرم، روشی برای به‌روزکردن ماتریس‌های سختی و میرایی ارائه داده‌اند. برای به‌روزکردن ماتریس‌های مزبور، از نتایج آزمایشهای سازه، شکل و پریود مدها را استخراج کرده‌اند و سپس الگوریتم به‌روزکردن را به‌کار برده‌اند. در حین حل این مسأله با مشکل بدحالتی ماتریس مشخصه برخورد و برای حل آن، از روش تمت استفاده کرده‌اند.

شاو [۱۴] روش غیرتکراری کمترین مربعات خطاها را که توسط یانگ و چن [۱۵] برای حل مسائل معکوس ارائه شده بود، مورد بررسی قرار داده و نشان داده‌است که این روش در حل این مسائل در حالتی که بدحالت نیستند، بدون استفاده از فرآیند تکراری، به جواب واحدی خواهد رسید. علاوه‌برآن، نشان داده که روش یانگ و چن برای حالتی که مسأله بدحالت می‌شود پاسخ مناسبی به‌دست نمی‌دهد. شاو برای حل این مشکل پیشنهاد کرده‌است:

ـ تعداد اندازه‌گیریها افزایش یابد یا اندازه‌گیریها تا حد امکان در نزدیکی جایی انجام گیرد که پارامترهای سیستم نامشخص است؛

ـ از روش تمت استفاده شود.

رونگ و همکارانش [۷] برای تشخیص و رفع بدحالتی مسائل شناسایی سیستم‌ها، از روش اصلاح‌شدهٔ کمترین مربعات که بر پایهٔ روش تمت بنا شده‌است، استفاده کرده‌اند.

از مشخصات مشترک این تحقیقات، تعیین فرکانس‌ها و شکل مدهای ارتعاشی به‌عنوان خواص دینامیکی سازه‌هاست. تعیین مشخصات میرایی سازه‌ها نیز کمتر مورد توجه واقع شده‌است.

حسن و ویولا [۱۶] ماتریس‌های جرم و سختی را به‌صورت

صریح ارائه نموده‌اند که جزء تحقیقاتِ معدودِ انجام‌شده در این زمینه هستند. ایشان قابهای برشی دو بعدی بدون میرایی و با میرایی را تحت بررسی قرار داده‌اند. این محققین در تعیین همـزمان ماتـریس‌های سختـی و جـرم بـرای قابهـای بـرشی دو بعدی بدون میرایی چندان موفق نبوده‌اند؛ بنابراین فرض کرده‌اند که یکی از این دو ماتریس از قبل مشخص می‌باشد و آنگاه ماتریس دوم را محاسبه نموده‌اند. برای قابهای برشی دو بعدی بامیرایی نیز روشی برای تعیین ماتریس میرایی ارائه نشده‌است.

در تحقیق حاضر، قابهای برشی دو و سه‌بعدی بدون میرایی و با میرایی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. علاوه‌برآن، روشی برای تعیین ماتریس سختی قابهای برشی مزبور تحت بارگذاری استاتیکی ارائه شده است. برای قابهای برشی بدون میرایی، روشی برای تعیین ماتریس جرم بیان شده است. برای قابهای برشی با میرایی، ماتریس‌های جرم و میرایی به‌صورت همزمان تعیین شده‌اند.

۴-۱- بررسی اجمالی تئوری روش تمت [۴، ۵ و ۶]

فـرض می‌شودکـه ماتریس $\mathbf{A}$ (از مرتبـهٔ r) متعلق به فضـای ماتریسی $\mathbf{R}$ باشد ($\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{n\times m}$). می‌توان نشان داد ماتریس‌های $\mathbf{U}$، $\mathbf{\Sigma}$ و $\mathbf{V}$ وجـود دارنـدکه هـریک به فضـای ماتـریسی خاصـی تعلق دارند ($\mathbf{U}\in\mathbf{R}^{n\times n}$، $\mathbf{\Sigma}\in\mathbf{R}^{n\times m}$ و $\mathbf{V}\in\mathbf{R}^{m\times m}$) و در رابطهٔ (۲) صدق می‌کنند:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{T} \tag{۲}$$

در این رابطه، $\mathbf{U}$ و $\mathbf{V}$ ماتریس‌های متعامد می‌باشند که به‌ترتیب شامل بـردارهـای ویـــژهٔ ماتـریس‌هـای $\mathbf{AA}^{T}$ و $\mathbf{A}^{T}\mathbf{A}$ هستنـــد. بالانویس $\mathbf{T}$ بیانگر ترانهادهٔ یک ماتریس است. ماتریس $\mathbf{\Sigma}$ نیز به‌صورت رابطهٔ (۳) بیان می‌شود:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۳}$$

در رابطـهٔ (۳)، $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\ldots\geq\sigma_r\geq 0$ است و $\sigma_1^2, \ldots$ و σ_r^2 مقـادیـر ویژهٔ غیرصفر ماتریس‌های $\mathbf{AA}^{T}$ و $\mathbf{A}^{T}\mathbf{A}$ هستند. از رابطهٔ (۲) می‌توان شبه معکوس (Pseudo-Inverse) ماتریس $\mathbf{A}$ را با رابطهٔ (۴) محاسبه نمود:

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{+}\mathbf{U}^{T} \tag{۴}$$

در رابطهٔ (۴)، $\mathbf{A}^{+}$ شبـه معکـوس $\mathbf{A}$ است. شبـه معکـوس یـک ماتـریس مربعـی، همان معکـوس آن است. در یک ماتریس مستطیلی، شبه معکوس آن برای به‌دست آوردن بهترین جواب ممکـــن در دستـــگاه معـادلات متناظـــر با آن ماتـریس بـه‌کار می‌رود [۴]. ماتـریس $\mathbf{\Sigma}^{+}$ در رابطـهٔ (۴) بـه‌صورت رابطـهٔ (۵) تعریف می‌شود:

$$\mathbf{\Sigma}^{+} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \sigma_r^{-1} & \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times m} \tag{۵}$$

با توجه به مطالب مذکور، توانایی یک دستگاه معادلات خطی بـرای به‌دست آوردن پاسخ درست را می‌تـوان با کمیتـی بـه نام عدد حالت (Condition Number) مشخص نمودکه به‌صورت رابطهٔ (۶) تعریف می‌شود:

$$C_N(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_r} \tag{۶}$$

هر چه عدد حالت بزرگتر باشد، نشانه وضعیت نامطلوبتر ماتریس $\mathbf{A}$ از نظر بد حالتی است.

برای تعیین ماتریس‌های مشخصهٔ قابهای برشی با استفاده از ایـن روش، در ابتـــدا قابهـای بـرشی دو بعـدی مـورد بـررسی قرار گرفته‌اند.

۵- قابهای برشی دوبعدی تحت بارگذاری استاتیکی

معادلهٔ تعادل قاب برشی دو بعدی با n درجهٔ آزادی، تحت بارگذاری استاتیکی، به‌صورت رابطه (۷) است:

$$\mathbf{KU=P \Rightarrow U=K^{-1}P} \qquad (۷)$$

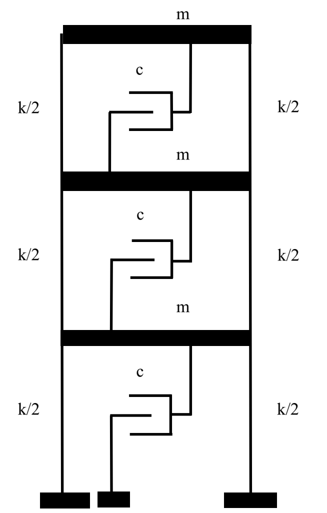
در این رابطه، ($\mathbf{K}$) ماتریس سختی قاب، $\mathbf{U}$ بردار تغییرمکان قاب و $\mathbf{P}$ بردار نیروی استاتیکی وارد بر قاب هستند که دارای درایه‌های زیر می‌باشند:

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & & 0 \\ 0 & -k_3 & & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}=\begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

با توجه به رابطهٔ (۷) بدیهی است که با مشخص بودن بردار نیرو و ماتریس سختی قاب، بردار تغییرمکان قاب به‌راحتی تعیین می‌گردد.

در بررسیهای مفصل صورت گرفته در مرجع [۱۷]، قابهای برشی دو بعدی یک، دو، سه، پنج و هشت طبقه در نظر گرفته شده‌است. به‌عنوان نمونه، نتایج مربوط به قاب سه درجه آزادی (سه طبقه) در شکل (۱) نشان داده‌شده‌است. فرض می‌شود که



شکل (۱): قاب برشی دوبعدی با سه درجهٔ آزادی

در این قاب، جرم طبقات یکسان و برابر ده کیلوگرم ($m=10kg$)، سختی برشی طبقات نیز یکسان و برابر ۱۰ کیلو نیوتن بر متر و میرایی متناظر طبقات نیز یکسان و برابر $c=\sqrt{1000}$ kg.rad/s باشد. برای این قاب، یک نیروی جانبی استاتیکی (p_3) برابر ۱۰۰ نیوتن در نظر گرفته شده‌است (در سراسر این مقاله از سیستم واحد SI استفاده شده‌است)؛ بنابراین:

$$\mathbf{K}=10^4\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{U}=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \\ 0.03 \end{bmatrix}$$

فرض می‌شود که بردارهای نیرو و تغییرمکانِ مذکور در قاب برشی مشخص و ماتریس سختی نامشخص است. برای تعیین ماتریس سختی این قاب با انجام یک سری عملیات جبری، معادلهٔ تعادل قاب موردنظر به‌صورت (۸) فرمولبندی شده‌است:

$$\mathbf{UK=P \Rightarrow K=U^{-1}P} \qquad (۸)$$

در این رابطه، $\mathbf{U}$ ماتریس تغییرمکان قاب، $\mathbf{K}$ بردار سختی قاب و $\mathbf{P}$ بردار نیروی استاتیکی وارد بر قاب هستند که دارای درایه‌های زیر می‌باشند:

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix} u_1 & -(u_2-u_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (u_2-u_1) & -(u_3-u_2) & & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -(u_n-u_{n-1}) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (u_n-u_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}=\begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

با حل رابطهٔ (۸)، سختی طبقات قاب برشی موردنظر و با مشخص شدن سختی طبقات، ماتریس سختی به‌دست می‌آید. برای قاب برشی سه درجه آزادی شکل (۱)، که تغییرمکان $\mathbf{U}$ و بارگذاری

P آن در قسمت قبل تعیین شده‌است، داریم:

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}0.01 & -0.01 & 0\\ 0 & 0.01 & -0.01\\ 0 & 0 & 0.01\end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 100\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{K}=\mathbf{U}^{-1}\mathbf{P}=\begin{bmatrix}10000\\ 10000\\ 10000\end{bmatrix}$$

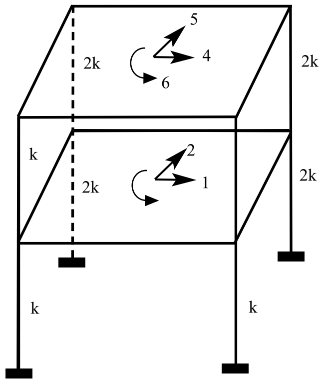
$$\Rightarrow k_1=k_2=k_3=10000=10\,\mathrm{KN/m}$$

با اعمال یک بارگذاری استاتیکی (معمولاً در طبقهٔ بام) و اندازه‌گیری تغییرمکانِ ایجادشده در طبقات، به‌سهولت می‌توان ماتریس سختی یک قاب برشی دو بعدی را به‌دست آورد.

۶ـ قابهای برشی ـ پیچشی سه‌بعدی تحت بارگذاری استاتیکی

در سازه‌های واقعی، احتمال اینکه سازه کاملاً متقارن باشد بسیار کم است؛ بنابراین مدهای پیچشی در این سازه‌ها تحریک می‌گردند و پاسخ سازه را تحت تأثیر قرار می‌دهند. به هر اندازه که تقارن سازه کمتر و نامنظم‌تر باشد (چه از نظر مشخصات هندسی و چه از نظر بارگذاری)، اثر مدهای پیچشی بر روی پاسخ سازه بیشتر خواهدبود. در نتیجه، مدل کردن دو بعدی سازه‌ها خطای بیشتری در پاسخ آنها ایجاد خواهدنمود؛ بنابراین در این قسمت سعی شده‌است که مسأله برای حالت سه‌بعدی نیز فرمولبندی شده، حل گردد.

به‌عنوان نمونه، قاب شکل (۲) در نظر گرفته شده‌است که در آن، سختی دو ستون قاب، دو برابر سختی دو ستون دیگر آن است. همچنین فرض شده که کف طبقات به شکل مربع هستند. لازم به ذکر است که این مثال به عنوان نمونه مورد بررسی قرار گرفته و این مفروضات خللی به کلّیت مسأله وارد نمی‌سازد.



شکل (۲): مشخصات قاب برشی سه‌بعدی دو طبقه. پیکانهای روی هر طبقه بیانگر درجات آزادی انتقالی و دورانی مربوط به آن طبقه هستند. اثرهای میرایی در این شکل نشان داده نشده‌است.

ماتریس‌های این قاب همانند قابهای دو بعدی، از برهم‌نهی ماتریس طبقات آن به‌دست می‌آید؛ بنابراین ماتریس‌های مشخصه این قاب به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

فرض می‌شودکه جرم طبقات دارای توزیع یکنواختی برابر m_0 باشد. محور مختصات نیز در مرکز جرم طبقه درنظر گرفته می‌شود و چون کف طبقه دارای تقارن می‌باشد، مرکز جرم در مرکز سطح قرار می‌گیرد. ابعادکف طبقات برابر a در نظر گرفته شده‌است. از آنجاکه دستگاه مختصات در مرکز جرم در نظر گرفته شده‌است، ماتریس جرم، قطری خواهدبود:

$$\mathbf{M}=m\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{6}a^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6}a^2\end{bmatrix}$$

در این ماتریس، m جرم کل طبقه است. گشتاور اینرسی دورانی کف نسبت به محور مختصات (I_0) برابر است با:

$$I_0=m\times\left(D^2+\frac{1}{12}(a^2+b^2)\right)$$

$$a=b \;\;,\;\; D=0 \;\;\Rightarrow\;\; I_0=\frac{1}{6}m\times a^2$$

$$m=m_0\times A \;\;\;,\;\;\; A=a^2$$

در روابط مذکور، A مساحت کف، a و b اضلاع کف و D فاصلهٔ

مرکز سطح از محور مختصات می‌باشند. ماتریس سختی این قاب نیز به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{K}=k\begin{bmatrix} 12 & 0 & -2a & 6 & 0 & -a \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ -2a & 0 & 6a^2 & -a & 0 & 3a^2 \\ 6 & 0 & -a & 6 & 0 & -a \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ -a & 0 & 3a^2 & -a & 0 & 3a^2 \end{bmatrix}$$

معادلهٔ تعادل استاتیکی این قاب به‌صورت رابطه (۱۲) می‌باشد:

$$\mathbf{KU=P \Rightarrow U=K^{-1}P} \qquad (۹)$$

در این رابطه، **K** ماتریس سختی و **U** بردار تغییرمکان قاب و **P** بردار نیروهای خارجی می‌باشند.

برای این قاب k، برابر ۱۰ کیلو نیوتن بر متر و طول ضلع کف (a) برابر ۳ متر در نظر گرفته شده‌است. مشابه قاب دو بعدی قسمت قبل، برای بارگذاریهای مختلف براحتی می‌توان بردار تغییرمکان (**U**) را محاسبه کرد. بعد از محاسبهٔ بردارهای تغییرمکان قاب، آنها را ذخیره نموده تا برای تحلیل معکوس و استخراج ماتریس سختی این قاب، مورد استفاده قرار گیرند. ماتریس سختی این قاب عبارت است از:

$$\mathbf{K}=10^4\begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & 54 & 3 & 0 & -27 \\ -6 & 0 & 3 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & -27 & -3 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$

به عنوان نمونه برای بارگذاری، بردار تغییرمکان حاصل در درجات آزادی شش‌گانهٔ این قاب، عبارت است از:

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \\ 1000 \\ 2000 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{U}=10^{-2}\begin{bmatrix} 2.1569 \\ 1.6667 \\ 0.9804 \\ 4.3137 \\ 3.3333 \\ 1.9608 \end{bmatrix}$$

مشابه مثال قبل، فرض می‌شود که بردارهای نیرو و تغییرمکان مزبور در قاب برشی - پیچشی سه‌بعدی مشخص هستند و ماتریس سختی نامشخص است. با توجه به اینکه سازه در جهت ۲ و ۵ متقارن است، مدهای پیچشی در این جهت تأثیری نخواهند داشت. به‌همین دلیل می‌توان سازه را در جهت مزبور به‌صورت دو بعدی مدل کرد که تحلیل این قاب در قسمت قبل ارائه گردیده‌است. از سوی دیگر، این سازه در جهت ۱ و ۴ نامتقارن است و مدهای پیچشی در این جهت مؤثر هستند و بدیهی است که نمی‌توان سازه را در این جهت به صورت دو بعدی مدل کرد. با توجه به توضیحات اخیر، معادلهٔ تعادل قاب مذکور شامل قسمتهای مربوط به بخش نامتقارن و بخش متقارن خواهد بود:

بخش نامتقارن:

$$\begin{bmatrix} k_{11}+k_{44} & k_{13}+k_{46} & -k_{44} & -k_{46} \\ k_{31}+k_{64} & k_{33}+k_{66} & -k_{64} & -k_{66} \\ -k_{44} & -k_{46} & k_{44} & k_{46} \\ -k_{64} & -k_{66} & k_{64} & k_{66} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_1 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_6 \end{bmatrix}$$

بخش متقارن:

$$\begin{bmatrix} k_{22}+k_{55} & -k_{55} \\ -k_{55} & k_{55} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ u_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_2 \\ p_5 \end{bmatrix}$$

مسأله‌ای که در اینجا باید مورد بررسی قرار گیرد، حل قسمت اول (بخش نامتقارن) است. برای حل این معادله و پس از انجام یک رشته عملیات جبری، رابطهٔ (۱۰) به‌دست، آید:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_3 & 0 & -(u_4-u_1) & -(u_6-u_2) & 0 \\ 0 & u_1 & u_2 & 0 & -(u_4-u_1) & -(u_6-u_2) \\ 0 & 0 & 0 & u_4-u_1 & u_6-u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_4-u_1 & u_6-u_2 \end{bmatrix} \times\begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{13} \\ k_{33} \\ k_{44} \\ k_{46} \\ k_{66} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_1 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_6 \end{bmatrix} \qquad (۱۰)$$

معـادلـهٔ مذکـور ظاهـراً از نظـر ریاضی پاسخـی نـدارد؛ چـراکه تعداد معلومات آن کمتر از تعداد مجهولات آن است. اگر تعداد معادلات خطی ($\mathbf{M}$) کمتر از تعداد مجهولات ($\mathbf{N}$) باشد، نباید انتظار جـواب واحـدی را داشت. در ایـن حـالت، معمولاً یک خانـوادهٔ $\mathbf{N\text{-}M}$ بُعـدی از جـوابها وجـود خـواهدداشت. اگـر بخواهیم این فضای جواب کامل را بیابیم، روش تمت به سادگی ایـن کار را انجـام می‌دهـد. این روش، $\mathbf{N\text{-}M}$ مقـدار تکیـن با مقادیر صفر (یا قابل اغماض) را نتیجه می‌دهد؛ چـراکه $\mathbf{M<N}$ است. در ایـن حـالت نیز، ستونهـای $\mathbf{V}$ متناظـر با مقادیرِ تکیـنِ صفـر شده، بردارهای پایــه هستند. ترکیب خطـی این بردارهای پایـه‌که بـه جـواب ویـژه افـزوده شده‌است، فضـای جـواب را پوشش می‌دهد [۴].

مقادیر عددی رابطهٔ (۱۰) برای این قاب برابر است با:

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix} 2.1569 & 0.9804 & 0 & 2.1569 & -0.9804 & 0 \\ 0 & 2.1569 & 0.9804 & 0 & -2.1569 & -0.9804 \\ 0 & 0 & 0 & 2.1569 & 0.9804 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.1569 & 0.9804 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

با داشتن بردارهای فوق و با حل رابطهٔ (۱۰) به‌کمک روش تمت، نتایج زیر به‌دست آمده‌که نشان‌دهندهٔ جوابهای مطلوب است:

$$\mathbf{K}=10^4\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 27 \\ 6 \\ -3 \\ 27 \end{bmatrix}$$

به بیـان دیگـر، نتایـج حاصل از بارگذاری استاتیکی برای تعیین ماتریس سختی دارای دقت قابل‌قبولی است.

۷ ـ بررسی قابهای برشی سه‌بعدی تحت بارگذاریهای دینامیکی

در تحقیقـات مفصل صـورت گرفتــه [۱۷]، قابهــای برشی دو بعـدی یک، دو، سه، پنـج و هشت طبقـه و قابهـای بـرشی ـ پیچشی سه‌بعدی یک و دو طبقـه، تحت بارگـذاریهـای پله‌ای، هارمونیک و زلزله مورد بررسی قرار گرفته‌اند. بارگذاری پله‌ای و هارمونیک در بالاترین سقف اعمال گردیده‌است. در این مقاله برای نمونه، نتایج به‌دست آمده از قاب برشی دو بعدی سه طبقهٔ شکل (۱) و قاب برشی ـ پیچشی سه‌بعدی دوطبقهٔ شکل (۲) ارائه شده‌است. برای مشاهدهٔ همهٔ نتایج می‌توان به مرجع [۱۷] مراجعه نمود. مشخصات فیزیکی این قابها به‌صورت زیر است.

۷ ـ ۱ ـ قاب برشی دو بعدی سه طبقه

مشخصات قاب برشی دو بعدی سه‌طبقه عبارت است از:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K}=10^4\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\sqrt{1000}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{cases} \omega_1 = 14.0735 \\ \omega_2 = 39.433 \\ \omega_3 = 56.982 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.802 & 0.445 & -1.247 \\ 2.247 & -0.802 & 0.555 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} M_1 = 92.962 \\ M_2 = 18.412 \\ M_3 = 28.629 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} K_1 = 0.18412\times10^5 \\ K_2 = 0.28629\times10^5 \\ K_3 = 0.92959\times10^5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 58.2228 \\ C_2 = 90.5340 \\ C_3 = 293.9621 \end{cases}$$

در روابط فوق، ω_iها بیانگر فرکانس مدهای ارتعاشی بر حسب رادیان بر ثانیه، $\boldsymbol{\Phi}$ بیانگر شکل مدهای ارتعاشی، M_iها، K_i ها

و C_iها به ترتیب بیانگر درایه‌های ماتریس‌های جرم، سختی و میرایی تعمیم یافتهٔ نرمال هستند.

۷-۲- قاب برشی - پیچشی سه‌بعدی دوطبقه

با توجه به توضیحات قبل، مسأله‌ای که در اینجا مورد بررسی قرار گرفته، حل قسمت اول است. همچنین فرض می‌شود که قاب شکل (۲) دارای ۰/۰۵ میرایی بحرانی برای مدهای انتقالی و ۰/۱ میرایی بحرانی برای مدهای دورانی (پیچشی) است. پس خواهیم داشت:

$$M = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 150 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = 10^4 \begin{bmatrix} 12 & -6 & -6 & 3 \\ -6 & 54 & 3 & -27 \\ -6 & 3 & 6 & -3 \\ 3 & -27 & -3 & 27 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 592.478 & -13.874 & -267.584 & -46.666 \\ -13.874 & 971.958 & -46.666 & -121.369 \\ -267.584 & -46.666 & 324.895 & -60.541 \\ -46.666 & -121.369 & -60.541 & 850.589 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \omega_1 = 14.5195 \\ \omega_2 = 26.5688 \\ \omega_3 = 38.0126 \\ \omega_4 = 69.5580 \end{cases} , \quad \begin{cases} \xi_1 = \xi_3 = 0.05 \\ \xi_2 = \xi_4 = 0.1 \end{cases}$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.1602 & -4.1602 & 0.1602 & -4.1602 \\ 1.6180 & 1.6180 & -0.6180 & -0.6180 \\ 0.2593 & -6.7314 & -0.0990 & 2.5712 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} M_1 = 375.7396 \\ M_2 = 9754.7556 \\ M_3 = 143.5197 \\ M_4 = 3725.9851 \end{cases} , \quad \begin{cases} K_1 = 0.7921 \times 10^5 \\ K_2 = 68.8590 \times 10^5 \\ K_3 = 2.0738 \times 10^5 \\ K_4 = 180.2751 \times 10^5 \end{cases}$$

در این روابط، ξ_iها بیانگر مقدار میرایی برحسب میرایی بحرانی هستند. سایر پارامترها نیز قبلاً تعریف شده‌اند. در دو بخش بعدی، دو نمونه قاب برشی مذکور برای شرایط با و بدون میرایی بررسی شده‌است.

۸- قابهای برشی بدون میرایی تحت بارگذاری دینامیکی

دستگاه معادلات دیفرانسیل حرکت این قابها به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\,\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t)$$

در رابطهٔ فوق، بردارهای $\mathbf{p}(t)$، $\mathbf{u}(t)$ و $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ دارای ابعاد $\mathbf{m}\times 1$ (ماتریس ستونی که $\mathbf{m}$ سطر دارد) هستند. $\mathbf{m}$ تعداد نقاطی است که در آنها نیروها، تغییرمکانها و شتابها ثبت شده‌اند. در این تحقیق اعداد مختلفی برای $\mathbf{m}$ مورد بررسی قرار گرفته‌است که به‌عنوان نمونه نتایج مربوط به $\mathbf{m}=1000$ در این مقاله ارائه شده‌است. معادلهٔ اخیر را می‌توان به‌صورت رابطهٔ (۱۱) نوشت:

$$\ddot{\mathbf{u}}^T(t)\mathbf{M} + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{K} = \mathbf{p}^T(t) \qquad (۱۱)$$

در قسمتهای بعد، برای دو قاب دوبعدی و سه‌بعدیِ تحت بررسی، دو حالت مختلف فرض شده‌است:

در حالت اول فرض بر آن است که در قاب برشی موردنظر، هر دو ماتریس جرم و سختی قاب مجهول هستند؛ بنابراین رابطهٔ (۱۱) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر تبدیل نمود:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^T(t) & \mathbf{u}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} = \mathbf{p}^T(t)$$

معادلهٔ اخیر را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{X}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{R} \qquad (۱-۱۱)$$

که در آن:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^T(t) & \mathbf{u}^T(t) \end{bmatrix}_{m\times 2n}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix}_{2n\times n} , \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T(t) \end{bmatrix}_{m\times n}$$

حال اگر در رابطهٔ (۱۱)، ماتریس سختی از روش دیگری (مثل بارگذاری استاتیکی) مشخص شود، حالت دوم ایجاد می‌شود.

در حالت دوم فرض بر آن است که در قاب برشی موردنظر، ماتریس جرم قاب مجهول است و ماتریس سختی قاب از پیش تعیین شده است؛ بنابراین رابطهٔ (۱۱) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$\mathbf{AX}=\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{X}^{+}=\mathbf{A}^{+}\mathbf{R} \tag{۱۱-۲}$$

که در آن:

$$\mathbf{A}=\left[\ddot{\mathbf{u}}^{T}(t)\right]_{m\times n} \quad , \quad \mathbf{X}=\left[\mathbf{M}\right]_{n\times n}$$

$$\mathbf{R}=\left[\mathbf{p}^{T}(t)\text{-}\mathbf{p}^{T}(t)\mathbf{K}\right]_{m\times n}$$

در ادامه دو حالت مزبور بررسی شده است. برای هر حالت نیز دو قاب نمونه مورد بررسی قرار گرفته است. برای هر قاب نیز سه بارگذاری دینامیکی لحاظ شده است. بارگذاریهای وارد در هر قسمت به صورت مختصر معرفی شده‌اند. در هر یک از این بررسیها، هدف اصلی، استخراج ماتریس‌های مجهول رابطهٔ (۱۱) به کمک روش تمت است. به بیان دیگر، برای حالات دوگانهٔ مورد بحث، لازم است که (۱۱-۱) و (۱۱-۲) حل گردند. بدین منظور، در هر حالت از حالات دوگانهٔ مورد بحث، عدد حالت نیز محاسبه و مجهولات حاصل ارائه شده است.

۸-۱- حالت اول

۸-۱-۱- قاب برشی دوبعدی سه‌طبقه

در این حالت، قاب مزبور تحت بارگذاریهای پله‌ای، هارمونیک و زلزله قرار گرفته است:

الف) بارگذاری پله ای ($\mathbf{p}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\100\end{bmatrix}$)

$$C_N(\mathbf{A})=2.4743\times10^{9}$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}0&0&4.5197\\0&0&8.0304\\0&0&9.9999\end{bmatrix} \;,\; \mathbf{K}=\begin{bmatrix}0&0&1009.2\\0&0&1541\\0&0&1969.6\end{bmatrix}$$

ب) بارگذاری هارمونیک ($\mathbf{p}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\100\end{bmatrix}\cdot\sin(25t)$)

$$C_N(\mathbf{A})=4.9460\times10^{9}$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}0&0&\text{-}360.36\\0&0&1006.6\\0&0&10.022\end{bmatrix} \;,\; \mathbf{K}=\begin{bmatrix}0&0&\text{-}1.7272\times10^{6}\\0&0&2.3635\times10^{6}\\0&0&\text{-}9.9656\times10^{5}\end{bmatrix}$$

پ) بارگذاری زلزله (زلزلهٔ ال‌سنترو)

$$C_N(\mathbf{A})=5.1671\times10^{9}$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \;,\; \mathbf{K}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

از نتایج حاصل کاملاً مشهود است که ماتریس‌های مجهولِ محاسبه شده، غیرواقعی هستند. اعداد حالت بزرگِ به‌دست آمده نیز مؤید این نتیجه‌گیری است.

۸-۱-۲- قاب برشی- پیچشی سه‌بعدی دوطبقه

با توجه به آنکه برای این قاب نیز نتایج، مشابه قاب دو بعدی است، از ارائهٔ جزئیات آن صرفنظر شده است.

۸-۲- حالت دوم

۸-۲-۱- قاب برشی دوبعدی سه‌طبقه

در این حالت نیز قاب مورد نظر تحت بارگذاریهای سه‌گانه قرار گرفته است:

الف) بارگذاری پله‌ای ($\mathbf{p}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\100\end{bmatrix}$)

$$C_N(\mathbf{A})=2.2126$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}10.0003&\text{-}0.0006&0.0003\\0.0005&9.9989&0.0007\\0.0003&\text{-}0.0009&10.0005\end{bmatrix}$$

ب) بارگذاری هارمونیک ($\mathbf{p}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\100\end{bmatrix}\cdot\sin(25t)$)

$$C_N(\mathbf{A})=7.0758$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}10.0002&\text{-}0.0006&0.0063\\\text{-}0.0001&9.9997&\text{-}0.0094\\0.0002&\text{-}0.0007&10.0066\end{bmatrix}$$

پ) بارگذاری زلزله (زلزلهٔ ال‌سنترو)

$$C_N(\mathbf{A}) = 11.7235$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10.0004 & -0.0007 & 0.0003 \\ 0.0004 & 9.9991 & 0.0006 \\ 0.0004 & -0.0010 & 10.0005 \end{bmatrix}$$

۸-۲-۲- قاب برشی - پیچشی سه‌بعدی دوطبقه

الف) بارگذاری پله‌ای ($\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix}$)

$$C_N(\mathbf{A}) = 9.7850$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 100.000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 150.000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 100.000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 150.000 \end{bmatrix}$$

ب) بارگذاری هارمونیک ($\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \sin(25t)$)

$$C_N(\mathbf{A}) = 506.7531$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 100.000 & 0.0000 & -0.1326 & 0.0000 \\ 0.0001 & 150.000 & 0.7052 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 100.079 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.4238 & 150.000 \end{bmatrix}$$

پ) بارگذاری زلزله (زلزلهٔ ال‌سنترو)

$$C_N(\mathbf{A}) = 52.7790$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 100.00 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 150.00 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 100.00 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 150.000 \end{bmatrix}$$

نتایج حاصل در این حالت مبیّن آن است که، ماتریس مجهول محاسبه‌شده، دارای دقت بسیار مناسبی است. اعداد حالت کوچکِ به‌دست آمده نیز مؤید این نتیجه‌گیری هستند.

۹- قابهای برشی با میرایی تحت بارگذاری دینامیکی

دستگاه معادلات دیفرانسیل حرکت این قابها به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\,\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t)$$

در معادلهٔ فوق، بردارهای $\mathbf{p}(t)$، $\mathbf{u}(t)$،$\dot{\mathbf{u}}(t)$ و $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ دارای ابعاد $m\times1$ (ماتریس ستونی که m سطر دارد) هستند. m تعداد نقاطی است که در آنها نیروها، تغییر مکانها، سرعتها و شتابها ثبت شده‌اند. معادلهٔ فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\ddot{\mathbf{u}}^T(t)\mathbf{M} + \dot{\mathbf{u}}^T(t)\mathbf{C} + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{K} = \mathbf{p}^T(t) \qquad (۱۲)$$

در قسمتهای بعد، برای دو قاب دو بعدی و سه‌بعدیِ تحت بررسی، مشابه قابهای برشی بدون میرایی، دو حالت مختلف فرض شده‌است.

در حالت اول فرض بر آن است که در قاب برشی موردنظر، هر سه ماتریس جرم، میرایی و سختی قاب مجهول هستند. بنابراین رابطهٔ (۱۲) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر تبدیل نمود:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^T(t) & \dot{\mathbf{u}}^T(t) & \mathbf{u}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} = \mathbf{p}^T(t)$$

معادلهٔ اخیر را نیز می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{X}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{R} \qquad (۱-۱۲)$$

که در آن:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^T(t) & \dot{\mathbf{u}}^T(t) & \mathbf{u}^T(t) \end{bmatrix}_{m\times3n}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix}_{3n\times n}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T(t) \end{bmatrix}_{m\times n}$$

حال اگر در رابطهٔ (۱۲)، ماتریس سختی از روش دیگری (مثل بارگذاری استاتیکی) مشخص شود، حالت دومی ایجاد می‌شود. در حالت دوم فرض بر آن است که در قاب برشی موردنظر، ماتریس جرم و میرایی قاب مجهول است و ماتریس سختی قاب از پیش تعیین شده‌است. پس رابطهٔ (۱۲) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{X}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{R} \qquad (۲-۱۲)$$

که در آن:

$$\mathbf{A}=\left[\ddot{\mathbf{u}}^T(t)\ \ \dot{\mathbf{u}}^T(t)\right]_{m\times 2n}\quad,\quad \mathbf{X}=\begin{bmatrix}\mathbf{M}\\ \mathbf{C}\end{bmatrix}_{2n\times n}$$

$$\mathbf{R}=\left[\mathbf{p}^T(t)\text{-}\mathbf{u}^T(t)\mathbf{K}\right]_{m\times n}$$

در ادامه دو حالت مزبور بررسی شده‌است. در اینجا جزئیات کاملاً مشابه حالت قابهای برشی بدون میرایی است و برای اختصار، از ذکر دو بارهٔ آنها اجتناب شده‌است. در هر یک از این بررسیها، هدف، استخراج ماتریس‌های مجهول رابطهٔ (۱۲) به کمک روش تمت است.

۹-۱- حالت اول

۹-۱-۱- قاب برشی دو بعدی سه طبقه

در این بخش، قاب برشی دو بعدی سه‌طبقه تحت بارگذاریهای پله- ای، هارمونیک وال سنترو قرار گرفته و نتایج حاصل ارائه گردیده‌است:

الف) بارگذاری پله‌ای ($\mathbf{p}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\100\end{bmatrix}$)

$$C_N(\mathbf{A})=\ 1.3899\times10^9\ ,\ \mathbf{M}=\begin{bmatrix}0&0&4.8111\\0&0&8.1237\\0&0&9.9999\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0&0&4.7395\\0&0&4.5412\\0&0&5.9335\end{bmatrix}\ ,\ \mathbf{K}=\begin{bmatrix}0&0&1498.8\\0&0&1436\\0&0&1876.4\end{bmatrix}$$

ب) بارگذاری هارمونیک ($\mathbf{p}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\100\end{bmatrix}\cdot\sin(25t)$)

$$C_N(\mathbf{A})=\ 6.7578\times10^9$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}0&0&1950.1\\0&0&848.54\\0&0&9.9355\end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0&0&9647.1\\0&0&-827.67\\0&0&-2653.6\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}0&0&3.0514\times10^6\\0&0&-2.6269\times10^5\\0&0&-8.3871\times10^5\end{bmatrix}$$

پ) بارگذاری زلزله (زلزلهٔ ال‌سنترو)

$$C_N(\mathbf{A})=\ 3.1850\times10^9\ ,\ \mathbf{M}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\ ,\ \mathbf{K}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

از نتایج حاصل کاملاً مشهود است که ماتریس‌های مجهولِ محاسبه‌شده، غیر واقعی هستند. اعداد حالت بزرگِ به‌دست آمده نیز مؤید این نتیجه‌گیری هستند.

۹-۱-۲- قاب برشی - پیچشی سه‌بعدی دوطبقه

با توجه به آنکه برای این قاب نیز نتایج، مشابه قاب دو بعدی است، از ارائهٔ جزئیات آن صرفنظر شده‌است.

۹-۲- حالت اول

۹-۲-۱- قاب برشی دو بعدی سه‌طبقه

در این حالت، قاب برشی دو بعدی سه‌طبقه تحت بارگذاریهای پله‌ای، هارمونیک و زلزله قرار گرفته‌است:

الف) بارگذاری پله‌ای ($\mathbf{p}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\100\end{bmatrix}$)

$$C_N(\mathbf{A})=\ 1.0854\times10^3$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}10.0003&-0.0007&0.0003\\0.0007&9.9987&0.0008\\-0.0003&-0.0001&10.0002\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}63.2584&-31.6402&0.0082\\-31.6496&63.2807&-31.6392\\0.0171&-31.6449&31.6330\end{bmatrix}$$

ب) بارگذاری هارمونیک ($\mathbf{p}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\100\end{bmatrix}\cdot\sin(25t)$)

$$C_N(\mathbf{A})=\ 3.5282\times10^3$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}9.9998&0.0000&0.0174\\0.0004&9.9990&-0.0752\\-0.0003&-0.0001&10.0113\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}63.2672&-31.6507&-1.3331\\-31.6471&63.2767&-29.6096\\0.0124&-31.6387&30.7196\end{bmatrix}$$

پ) بارگذاری زلزله (زلزلهٔ ال‌سنترو)

$$C_N(\mathbf{A})=\ 6.2585\times10^3$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}10.0004&-0.0019&0.0010\\0.0003&10.0004&-0.0002\\0.0004&-0.0016&10.0009\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}63.2464&-31.6321&0.0056\\-31.6237&63.2514&-31.6262\\0.0004&-31.6233&31.6230\end{bmatrix}$$

۹-۲-۲- قاب برشی - پیچشی سه‌بعدی دوطبقه

قاب برشی - پیچشی سه‌بعدی دو طبقه تحت بارگذاریهای پله‌ای، هارمونیک و زلزله قرار گرفته و نتایج حاصل ارائه گردیده‌است:

الف) بارگذاری پله‌ای ($\mathbf{p}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\100\\0\end{bmatrix}$)

$$C_N(\mathbf{A})=7.9068\times10^3$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}99.9999 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000\\ 0.0001 & 150.0000 & 0.0000 & 0.0000\\ 0.0000 & 0.0000 & 100.0786 & 0.0000\\ 0.0000 & -0.0003 & -0.0003 & 150.0001\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}592.477 & -13.871 & -267.583 & -46.669\\ -13.850 & 971.942 & -46.681 & -121.357\\ -267.582 & -46.669 & 324.894 & -60.540\\ -46.686 & -121.358 & -60.531 & 850.582\end{bmatrix}$$

ب) بارگذاری هارمونیک ($\mathbf{p}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\100\\0\end{bmatrix}\cdot\sin(25t)$)

$$C_N(\mathbf{A})=2.6377\times10^4$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}100.0000 & 0.0000 & 0.5723 & 0.0000\\ 0.0005 & 150.0001 & -1.9371 & 0.0001\\ 0.0000 & 0.0000 & 99.9961 & 0.0000\\ 0.0003 & -0.0001 & -0.0931 & 150.0001\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}592.474 & -13.871 & -286.588 & -46.669\\ -13.834 & 971.938 & 62.256 & -121.358\\ -267.581 & -46.669 & 334.576 & -60.540\\ -46.692 & -121.356 & -116.866 & 850.582\end{bmatrix}$$

پ) بارگذاری زلزله (زلزلهٔ ال‌سنترو)

$$C_N(\mathbf{A})=1.4032\times10^4$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}100.0000 & 0.0000 & 0.0001 & -0.0001\\ 0.0001 & 149.9998 & -0.0002 & 0.0001\\ 0.0000 & -0.0001 & 100.0000 & 0.0000\\ -0.0001 & 0.0001 & 0.0000 & 150.0000\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}592.490 & -13.882 & -267.593 & -46.661\\ -13.942 & 972.018 & -46.613 & -121.415\\ -267.591 & -46.663 & 324.901 & -60.546\\ -46.624 & -121.407 & -60.576 & 850.618\end{bmatrix}$$

نتایج حاصل در این حالت نشان می‌دهند که ماتریس‌های مجهولِ محاسبه‌شده، دارای دقت مناسبی هستند. اعداد حالت نسبتاً کوچکِ به‌دست آمده نیز مؤید این نتیجه‌گیری هستند.

۱۰- نتیجه‌گیری

اهم نتایج این تحقیق عبارتند از:

۱- باافزایش تعداد درجات آزادی، عدد حالت مسأله افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، میزان حساسیت پاسخ مسأله نسبت به خطاهای ایجاد شده، زیادتر می‌شود.

۲- در همهٔ تحلیلهای انجام‌شده، مؤلفه ($\mathbf{m}_{n\times n}$) ماتریس جرم نسبتاً دقیق به‌دست می‌آید.

۳- تمامی نتایجی که برای قابهای برشی دو بعدی به‌دست آمده، برای قابهای برشی سه‌بعدی نیز صادق است.

۴- اثر مدهای پیچشی در تحلیل معکوس قابهای برشی - پیچشی سه‌بعدی، مشابه اثر افزایش درجات آزادی در قابهای برشی دو بعدی است. به عبارت دیگر، عدد حالت مسألهٔ تعیین مشخصات دینامیکی قاب برشی - پیچشی سه‌بعدی یک طبقه، نزدیک به عدد حالت مسألهٔ تعیین مشخصات دینامیکی قاب برشی دو بعدی دو طبقه است.

۵- در این تحقیق، کاربرد روش تمت برای تعیین ماتریس‌های مشخصه قابهای برشی دو بعدی و سه‌بعدی ارائه شده‌است. با توجه به آنکه با تقریب قابل قبولی می‌توان قابهای ساختمانی واقعی را به‌صورت قابهای برشی مدل کرد، به‌نظر می‌رسد که با توسعه این روش (بند ۶) بتوان این روش را در مورد ساختمانهای واقعی به‌کار برد.

۶- برای توسعه این روش لازم است که دقت آن در مقایسه با سایر روشهای عددی (مانند روش نیومارک) برآورد گردد. همچنین بررسی تأثیرات وجود نوفه‌های مختلف (محیطی و دستگاهی) در نتایج حاصل، حائز اهمیت است.

۱۱- مراجع

۱. آقاکوچک، علی‌اکبر؛ معماری، علی‌محمد. (۱۳۷۲). آزمایشات لرزه‌ای بر روی ساختمانهای واقعی: تهران: مؤسسهٔ بین‌المللی زلزله‌شناسی و مهندسی زلزله.

۲. حاج‌مؤمنی، عقیل. (۱۳۷۹). ارزیابی خصوصیات دینامیکی یک‌سد بتنی قوسی با مقایسهٔ نتایج مدل ریاضی و آزمایشهای ارتعاش محیطی. پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد مهندسی عمران، دانشکدهٔ فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس.

3.Bui, H. D., Tanaka, M. (1994). *Inverse problems in engineering mechanics,* Balkema.

4.Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P. (1997). *Numerical recipes in fortran 77, The art of scientific computing* (2nd edition). Cambridge University Press.

5.Schott, J. R. (1997). *Matrix analysis for statistics.* John Willy & Sons.

6.Watkins, D. S. (1991). *Fundamental of matrix computations.* John Willy & Sons.

7.Rong, Q., Shi, J., Ceglarek, D. (2001). Adjusted least squares approach for diagnosis of Ill-conditioned compliant assemblies. *Journal of Manufacturing Science and Engineering, 123,* 453-461.

8.Satake, N., Yokota, H. (1996). Evaluation of vibration properties of high-rise steel buildings using data of vibration tests and earthquake observation. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 59,* 265-282.

9.Sugawara, Y., Sugiyama, T., Kobayashi, T., Yamaya, H., Kitamura, E. (1997). Correlation analysis for forced vibration test of the Haulien large scale seismic test program. *Journal of Nuclear Engineering and Design,* 172, 281-288.

10.Yeih, W. Chen, J. T. Cheng, C. M. (1999). Applications of dual MRM for determining the natural frequencies and natural modes of an Euler-Bernoulli beam using the singular value decomposition method. *Engineering Analysis with Boundary Elements,* 23, 339-360.

11.Nasserzare, J., Lei, Y., Eskandari-Shiri, S. (2000). Computation of natural frequencies and mode shapes of arch dams as an inverse problem. *Advances in Engineering Software,* 31, 827-836.

12.Ziaei Rad, S. (1997). *Methods for updating numerical models in structural dynamics.* Ph.D. Dissertation, University of London.

13.Friswell, M. I., Inman, D. J., Pilkey, D. F. (1998). The direct updating of damping and stiffness matrices. *AIAA Journal,* 36, 491-493.

14.Shaw, J. (2001). Noniterative solution of inverse problems by the linear least square method. *Applied Mathematical Modeling,* 25, 683-696.

15.Yang, C. Y., Chen, C. K. (1996). The boundary estimation in two-dimensional inverse heat conduction problems. *Journal Phys. D: Appl. Phys.,* 29, 333-339.

16.Hasan, W. M., Viola, E. (1997). Use of the singular value decomposition method to detect ill-conditioning of structural identification problems. *Computers & structures,* 63, 267-275.

۱۷. چوپانی، کاظم. (۱۳۸۲). تعیین مشخصات دینامیکی سازه‌ها با استفاده از تکنیکهای معکوس. پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد مهندسی زلزله، دانشکدهٔ فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس.